TD5 : Nombres réels et suites

5.1 Inégalités et borne supérieure

Exercice 1 ($\star$) Montrer que tout réels x et y strictement positif :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{(x^2+y^2)/2}.$$

Pour quels valeurs obtient-on l'égalité pour chacune des inégalités.

Exercice 2 ($\star$) Démontrer les propriétés suivantes :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$.

c) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 3 ($\star\star$) Déterminer les bornes inférieure et supérieure, lorsqu'elles existent, des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1} \text{ pour } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ et } B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 4 ($\star\star$) Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$.

a) Prouver l'existence de $\sup(A)$ et $\inf(B)$ et montrer que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

b) Montrer que $\sup(A) = \inf(B) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B, |x-y| < \varepsilon$.

Exercice 5 ($\star\star$) Déterminer les ensembles : $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ et $J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

5.2 Suites réelles explicites et récurrences linéaires

Exercice 6 ($\star$) Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des suites suivantes :

a) $\frac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$ **d)** $n^4 + \cos n$ **g)** $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ où $a, b > 0$,

b) $\frac{1}{n} + (-1)^n$ **e)** $\frac{n^2(1+(-1)^n)}{n^3+1}$ **h)** $\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$

c) $\sqrt{n} + (-1)^n$ **f)** $\frac{n+(-1)^n n^2}{n^2+n+1}$ **i)** $n^2 \times \frac{1+2+\ldots+n}{1+8+\ldots+n^3}$

Exercice 7 ($\star$) Déterminer une expression explicite et la limite éventuelle des suites définies par :

a) $\begin{cases} a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0 \\ a_0 = 1 \text{ et } a_1 = -2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} c_{n+2} - c_{n+1} + \frac{c_n}{2} = 0 \\ c_0 = 1 \text{ et } c_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2b_{n+2} + b_{n+1} - b_n = 0 \\ b_0 = 3 \text{ et } b_1 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} d_{n+2} - 6d_{n+1} + 9d_n = 0 \\ d_0 = 0 \text{ et } d_1 = 3 \end{cases}$

Exercice 8 ($\star$) Etudier la suite définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et la relation de récurrence : $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$, pour tout $n \geq 0$.

Exercice 9 ($\star$) Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

Calculer u_n^2. En déduire la limite de la suite (u_n).

5.3 Suites récurrentes non linéaires

Exercice 10 ($\star$) Etudier la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

Exercice 11 ($\star$) Etudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + 1}$.

Exercice 12 ($\star\star$) Montrer que la suite définie par $u_0 \in [0,2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+(-1)^n u_n}$ n'admet pas de limite.

Exercice 13 ($\star$) Soient $0 < a_0 < b_0$ deux nombres réels positifs. On pose pour tout $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que les suites a_n et b_n convergent toutes les deux vers une même limite.

Exercice 14 ($\star\star$) Soient deux suites réelles définies par : $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \tfrac{2}{a_{n+1}} = \tfrac{1}{a_n} + \tfrac{1}{b_n} \text{ et } b_{n+1} = \tfrac{a_n+b_n}{2}.$$

a) Montrer que les suites sont bien définies.
b) Montrer que a_n et b_n sont des rationnels.
c) Montrer que $a_n b_n$ est stationnaire.
d) Déterminer le signe de $b_n - a_n$.
e) Montrer que les suites sont adjacentes et déterminer si la limite est rationnelle.

Exercice 15 ($\star\star$) Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{2^n}}$.
On désigne par α_n l'unique solution positive de l'équation : $x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0$.
Montrer, par récurrence sur n, la propriété : $\forall n \geq 2, \quad u_n > \alpha_n$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et trouver sa limite.

5.4 Problème classique

Exercice 16 ($\star\star$) (Divergence de $(\sin(n))_{n\geq 0}$.)
On suppose par l'absurde que $\sin(n) \to l$ admet une limite finie.

a) Montrer que la suite $(\cos(n))_{n\geq 0}$ est convergente et que sa limite est $l' = l \times \frac{1-\cos 1}{\sin 1}$.
b) Déterminer les limites de $(\sin(2n))_{n\geq 0}$ et $(\cos(2n))_{n\geq 0}$ de deux manières.
c) En déduire que $l = 0$ et $l' = 1$ et conclure.

Exercice 17 ($\star\star$) (Série harmonique)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a) Montrer que pour tout $p > 1$, $\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
b) En déduire la limite de la suite (S_n).
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} = S_n$. En déduire la limite de T_n.

Exercice 18 ($\star\star$) (Série divergente)
Pour tout entier $n > 0$, on pose : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}}$.

a) Prouver l'inégalité : $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
b) Prouver les inégalités : $2\sqrt{n+1} - 2 < u_n < 2\sqrt{n}$. En déduire que $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ converge.
c) Montrer que $u_n - 2\sqrt{n}$ est une suite décroissante et convergente.

Exercice 19 ($\star\star\star$) (Lemme de Cesàro) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.
On considère la moyenne arithmétique des premiers termes : $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j$.

a) Montrer qu'on a : $\lim u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = 0$.
b) Soit $l \in \mathbb{R}^*$. Montrer que : $\lim u_n = l \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = l$.
c) Montrer que : $\lim u_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = +\infty$.