TD8 : Calcul matriciel - Corrigé

Exercice 1

Indication :

a) Pour additionner des matrices, il faut qu'elle est la même taille.

b) Pour multiplier des matrices, il faut que le nombre de lignes de la première soit égal au nombre de colonnes de la seconde.

Solution :

a) $A+C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $B+D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$ $AD = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 45 & 3 \end{pmatrix}$ $BC = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 15 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ $BE = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

$CB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$ $CD = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ $DA = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 \\ 3, & 27 & 0] \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $DC = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 9 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $DE = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$EA = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 1 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ $EC = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3] \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) On a : $(B-D)E(A+3C) = \begin{pmatrix} -47 & -24 & -44 \\ -46 & -36 & -38 \\ 38 & 48 & 24 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Indication :

Si on dispose d'un polynôme annulateur alors en isolant la matrice I_n, on obtient une relation du type $I_n = MQ(M) = Q(M)M$ avec Q un polynôme.
Donc par définition, M est inversible et $M^{-1} = Q(M)$.

Solution :

a) On a $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Donc comme combinaison linéaire $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$.

c) On a $2I_3 = M^3 + 2M^2 - M = M(M^2 + 2M - I_3) = (M^2 + 2M - I_3)M$.
Donc M est inversible et son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 + 2M - I_3)$.

Exercice 3

Indication :

Pour calculer des puissances de matrices 2×2. On peut regarder les premiers termes puis construire une récurrence. On peut également faire apparaître la formule du binôme en décomposant la matrice en deux matrices plus simple qui commutent.

Solution :

a) On a $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = I_2 + B$ avec $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
On a $B^2 = B$ donc par récurrence immédiate pour tout $k \geq 1, B^k = B$.
Les matrices I_2 et B commutent donc la formule du binôme de Newton s'applique :
$A_1^n = (I_2 + B)^n$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$
$= B^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B$
$= I_2 + (2^n - 1)B$
$= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{smallmatrix}\right)$.

b) On écrit $A_2 = aI_2 + bN$ avec $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice N est nilpotente $N^2 = 0$ et donc $\forall k \geq 2, N^k = 0$.
Les matrices I_2 et N commutent et la formule du binôme donne :
$A_2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} (bN)^k$
$= a^n I_2 + na^{n-1} bN + 0$
$= \left(\begin{smallmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{smallmatrix}\right)$.

c) On conjecture $A_3^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On le montre par récurrence :
<u>Initialisation</u> $n = 0$
On a $A_3^0 = I_2 = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$.
<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $A_3^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.
Alors $A_3^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta & \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta \\ -\sin(n\theta)\cos\theta - \cos(n\theta)\sin\theta & \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & \sin((n+1)\theta) \\ -\sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}$

Exercice 4

<u>Indication</u> :
a) On calcul les puissances de B. Puis on applique la formule du binôme de Newton.
b) Lorsqu'on dispose d'une formule pour tout $n > 0$. On peut l'essayer avec $n < 0$ en calculant $A^n A^{-n}$. Par unicité de l'inverse, on en déduit que la formule reste valide pour $n < 0$.

<u>Solution</u> :

a) On a $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$. Ainsi B est nilpotente d'ordre 3.
On a $A^n = (I_3 + B)^n$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$
$= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On pense essayer $n = -1$ dans la formule précédente.
On a $(I_3 + B)(I_3 - B + B^2) = I_3 + B^3 = I_3$.
Donc $A = I_3 + B$ est inversible et $A^{-1} = I_3 - B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Puis on peut conjecturer que $B^{-n} = I_3 - nB + \frac{-n(-n-1)}{2} B^2$ d'après le cas $n \geq 0$.
Pour le démontrer, il suffit de vérifier la valeur :
$B^n B^{-n} = (I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2)(I_3 - nB + \frac{n(n+1)}{2} B^2)$
$= I_3 + 0B + 0B^2 + n^2 B^3 + \frac{n^2(n-1)(n+1)}{4} B^4 = I_3$.
Donc $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5

<u>Indication</u> :
La formule du binôme de Newton fait apparaître une disjonction sur les rangs pairs et impairs $A^n = a_n I_3 + b_n J$. On calcul $a_n + b_n$ et $a_n - b_n$ pour déterminer ces coefficients.

<u>Solution</u> :

a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $aI_3 + bJ = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 2b \\ 0 & a+b & 2b \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.

En identifiant avec les coefficients de la matrice A, on obtient le système $\begin{cases} a + b & = 4 \\ 2b & = 2 \\ a - b & = 2 \end{cases}$.

Donc $(a, b) = (3, 1)$ est l'unique couple solution.

b) On a $J^2 = I_3$. Donc $J.J = I_3$ et J est son propre inverse. Ainsi $J^{-1} = J$.

c) On utilise la formule du binôme de Newton car I_3 et J commutent. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$A^n = (3I_3 + J)^n$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} J^k$
$= \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3 + \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} 3^{n-k} J$
$= a_n I_3 + b_n J$.

avec $a_n = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} 3^{n-k}$ et $b_n = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} 3^{n-k}$.

Ils vérifient le système $\begin{cases} a_n + b_n & = (3+1)^n = 4^n \\ a_n - b_n & = (3-1)^n = 2^n \end{cases}$.

Donc $a_n = \frac{4^n+2^n}{2}$ et $b_n = \frac{4^n-2^n}{2}$.

Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} a_n+b_n & 0 & 2b_n \\ 0 & a_n+b_n & 2b_n \\ 0 & 0 & a_n-b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 4^n-2^n \\ 0 & 4^n & 4^n-2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Solution :

a) On établie l'existence par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation Pour $n = 0$, on pose $a_0 = 0$ et on a $A^0 = I_3$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ vérifiant $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$.

Alors $A^{n+1} = AA^n$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4a_n & 4a_n-5 & 6-4a_n \\ 3-2a_n & 2a_n-3 & 4-2a_n \end{pmatrix}$.

On pose $a_{n+1} = 3 - 2a_n$ qui convient à $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_{n+1} & 1-2a_{n+1} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & -a_{n+1} & 1+a_{n+1} \end{pmatrix}$.

b) La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est donnée par $\begin{cases} a_{n+1} & = 3 - 2a_n \\ a_0 & = 0 \end{cases}$. Elle est arithmético-géométrique.

Soit $l \in \mathbb{R}$ le point fixe tel que $l = 3 - 2l$ donc $l = 1$.

Puis $a_n = (-2)^n(a_0 - l) + l = 1 - (-2)^n$.

c) Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+1} & -1-(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} \\ 1-(-2)^n & (-2)^n-1 & 2-(-2)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Indication :

b) Si $b \neq 0$, on dispose d'un polynôme annulateur qui permet d'inverser la matrice.
Si $b = 0$, alors on peut calculer le rang pour déterminer si la matrice est inversible.

c) On raisonne par récurrence.

d) On recherche a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et a_n en supprimant les b_n et b_{n+1} de l'expression.

Solution :

a) On a $M(x)^2 = \begin{pmatrix} x^2+2 & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & x^2+2 & 2x+1 \\ 2x+1 & 2x+1 & x^2+2 \end{pmatrix}$ et $aM(x) + bI_3 = \begin{pmatrix} ax+1 & a & a \\ a & ax+b & a \\ a & a & ax+b \end{pmatrix}$.

Donc $a = 2x + 1$ et $ax + b = x^2 + 2$ en identifiant les coefficients. Puis $b = -x^2 - x + 2$.

b) Lorsque $b \neq 0$ alors on peut écrire $I_3 = \frac{1}{b}(M(x)^2 - aM(x)) = \frac{1}{b}(M(x) - aI_3)M(x)$.

Donc $M(x)$ est inversible d'inverse $\frac{1}{b}(M(x) - aI_3)$.

Si $b = 0$ alors $x^2 + x - 2 = 0$ donc $x \in \{1, -2\}$.

Si $x = 1$ alors $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car de rang 1.

Si $x = -2$ alors $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car de rang 2.

c) On démontre l'existence par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation Pour $n = 0, a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tel que $M(x)^n = a_n M(x) + b_n I_3$.

On a $M(x)^{n+1} = a_n M(x)^2 + b_n M(x)$

$= a_n(aM(x) + bI_3) + b_n M(x)$

$= (aa_n + b_n)M(x) + a_n b I_3$.

On pose $a_{n+1} = aa_n + b_n$ et $b_{n+1} = ba_n$ qui conviennent.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = aa_{n+1} + b_{n+1}$
$= aa_{n+1} + ba_n$
$= (2x+1)a_{n+1} - (x^2 + x - 2)a_n$.
C'est une SRL2 et son polynôme caractéristique est :
$\chi(q) = q^2 - (2x+1)q + (x^2 + x - 2)$
$= q^2 - ((x-1) + (x+2))q + (x-1)(x+2)$
$= (q - x + 1)(q - x - 2)$.
Donc $a_n = \lambda_1(x-1)^n + \lambda_2(x+2)^n$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ donnés par :
$$\begin{cases} a_0 = 0 & = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_1 = 1 & = \lambda_1(x-1) + \lambda_2(x+2) \end{cases}$$
Donc $\lambda_1 = -\lambda_2 = -1/3$.
Puis $a_n = \frac{(x+2)^n - (x-1)^n}{3}$.

e) Lorsque $x = 3$, on a : $a = 2x + 1 = 7$ et $b = -x^2 - x + 2 = -10$.
Puis $a_n = \frac{5^n - 2^n}{3}$ et $b_{n+1} = ba_n = -10\frac{5^n-2^n}{3}$.
Donc pour $n \geq 1, M(3)^n = \begin{pmatrix} 3a_n+b_n & a_n & a_n \\ a_n & 3a_n+b_n & a_n \\ a_n & a_n & 3a_n+b_n \end{pmatrix}$
avec $a_n = \frac{5^n-2^n}{3}$ et $3a_n + b_n = \frac{5^n+2^{n+1}}{3}$.

Exercice 8

<u>Indication</u> :

Il s'agit d'une suite géométrique matricielle. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite définie par son premier terme $X_0 \in \mathbb{R}^p$ et la relation $X_{n+1} = AX_n$ alors $X_n = A^n X_0$. Il suffit donc de calculer les puissances de la matrice A pour déterminer la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

<u>Solution</u> :

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
L'énoncé peut s'écrire $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $X_{n+1} = AX_n$.

b) On pose $N = A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On a $N^2 = (0)$. Donc N est une matrice nilpotente.

c) Les matrices I_2 et N commutent. D'après la formule du binôme de Newton :
$A^n = (3I_2 + N)^n$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(3I_2)^{n-k}N^k$
$= 3^n I_2 + n3^{n-1}N$
$= \begin{pmatrix} 3^n+n3^{n-1} & -n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & 3^n-n3^{n-1} \end{pmatrix}$.

d) On a $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 3^n+n3^{n-1} & -n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & 3^n-n3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$
donc $u_n = (3^n + n3^{n-1})u_0 - n3^{n-1}v_0$
et $v_n = n3^{n-1}u_0 + (3^n - n3^{n-1})v_0$.

Exercice 9

<u>Indication</u> :

On calcul les premières puissances pour détecter la formule à démontrer.

<u>Solution</u> :

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$.
Donc en écrivant $n = 3q + r$ via la division euclidienne de $n \in \mathbb{N}$ par 3.
On trouve $A^n = (A^3)^q A^r = A^r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$.
L'équation $A^3 = I_3$ s'écrit également $AA^2 = I_2$.
Donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = A^2$.

Exercice 10

Indication :

Il s'agit de la méthode diagonalisation d'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Pour cela, il faut trouver une matrice P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Le calcul des puissances de A est alors donné par celui des puissances de D car $A^n = PD^nP^{-1}$. Les opérations sur les matrices diagonales s'effectuent coefficients par coefficients donc ne pose plus de problème.

Solution :

a) Par récurrence immédiate, on a $v_n \geq 0$ et $w_n > 0$. Donc le quotient est toujours défini.
Puis on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = \frac{v_n}{w_n}$.
Initialisation Pour $n = 0$, on a $\frac{v_0}{w_0} = \frac{u_0}{1} = u_0$.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{v_n}{w_n}$.
On a $\frac{v_{n+1}}{w_{n+1}} = \frac{3v_n+2w_n}{v_n+2w_n}$
$= \frac{3u_nw_n+2w_n}{u_nw_n+2w_n}$ par H.R.
$= \frac{3u_n+2}{u_n+2}$ car $w_n \neq 0$.
$= u_{n+1}$.

b) Les relations de récurrence simple s'écrivent sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$
Par récurrence immédiate, on obtient $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

c) A l'aide du pivot de Gauss-Jordan, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Puis le calcul donne $PDP^{-1} = A$.

d) On montre par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puis $PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2.4^n & -2+2.4^n \\ -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix}$.
Donc $v_n = \frac{1}{3}\left((1+2.4^n)v_0 + (-2+2.4^n)w_0\right)$
$= \frac{u_0-2}{3} + \frac{2u_0+2}{3}4^n$.
Et $w_n = \frac{1}{3}\left((-1+4^n)v_0 + (2+4^n)w_0\right)$
$= \frac{2-u_0}{3} + \frac{u_0+1}{3}4^n$.
Puis $u_n = \frac{v_n}{w_n} \sim_{+\infty} \frac{\frac{2u_0+2}{3}4^n}{\frac{u_0+1}{3}4^n} = \frac{2u_0+2}{u_0+1} = 2$.

Exercice 11

Indication :

On calcul les puissances à l'aide d'un polynôme annulateur $P(A) = 0$.

1. On réalise la division euclidienne de X^n par P i.e. (DE) $X^n = Q_n(X)P(X) + R_n(X)$.
2. On détermine les coefficients du reste $R_n(X) = a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_1X + a_0$ avec $d = \deg(P)$ en résolvant le système obtenue en évaluant (DE) en $x_1, ..., x_d$ les racines du polynôme P.
3. Pour conclure, on évalue (DE) en A et on trouve $A^n = R_n(A) = a_{d-1}A^{d-1} + ... + a_1A + a_0I_p$.

Solution :

a) A l'aide du pivot de Gauss-Jordan, on trouve $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Par calcul, on trouve $(A - 6I_3)(A^2 - 3I_3) = 0$.
Donc en développant on a $A^3 - 6A^2 - 3A + 18I_3 = 0$.
Puis $A(A^2 - 6A - 3I_3) = -18I_3$ et A est inversible avec $A^{-1} = \frac{-1}{18}(A^2 - 6A - 3I_3)$.

c) Le polynôme annulateur $P(X) = X^3 - 6X^2 - 3X + 18 = (X-6)(X^2-3) = (X-6)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut effectuer la division euclidienne de X^n par P sous la forme :
$X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ avec $R_n(X) = a_nX^2 + b_nX + c_n$ de degré au plus 2.
En remplaçant par les racines réelles du polynômes on trouve le système :

$$\begin{cases} 6^n & = P(6)Q_n(6) + R_n(6) = R_n(6) \\ \sqrt{3}^n & = P(\sqrt{3})Q_n(\sqrt{3}) + R_n(\sqrt{3}) = R_n(\sqrt{3}) \\ (-\sqrt{3})^n & = P(-\sqrt{3})Q_n(-\sqrt{3}) + R_n(-\sqrt{3}) = R_n(-\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36a_n + 6b_n + c_n & = 6^n \\ 3a_n + \sqrt{3}b_n + c_n & = 3^{n/2} \\ 3a_n - \sqrt{3}b_n + c_n & = (-1)^n 3^{n/2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n & = \frac{1}{33}6^n - \frac{3+8\sqrt{3}}{198}\sqrt{3}^n - \frac{3-8\sqrt{3}}{198}(-\sqrt{3})^n \\ b_n & = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}^n - \frac{\sqrt{3}}{6}(-\sqrt{3})^n \\ c_n & = \frac{-1}{11}6^n + \frac{6+\sqrt{3}}{11}\sqrt{3}^n + \frac{6-\sqrt{3}}{11}(-\sqrt{3})^n \end{cases}$$

Donc $A^n = P(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$

La formule est également valide pour $n \in \mathbb{Z}$ en vérifiant $A^{-n}A^n = I_3$.

Exercice 12

Indication :

On applique l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan. On raisonne par disjonction suivant si le coefficient diagonal est un pivot (i.e. non nul) ou est nul.

Réponse :

a) 1er cas $\alpha = 1$:
Si $a = b$ alors $\mathcal{S} = \{\begin{pmatrix} a-t \\ t \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}\}$.
Si $a \neq b$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

2eme cas $\alpha = -1$:
Si $a = -b$ alors $\mathcal{S} = \{\begin{pmatrix} a+t \\ t \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}\}$.
Si $a \neq -b$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

3eme cas $\alpha^2 \neq 1$:
On a $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} a-\alpha b \\ \alpha a - b \end{pmatrix} \right\}$

b) 1er cas $a + c = 2b$: $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-b \\ b-a \end{pmatrix} \right\}$.
2eme cas $a + c \neq 2b$: $\mathcal{S} = \emptyset$.

c) $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\}$.

d) $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} \text{ pour } t \in \mathbb{R} \right\}$.

e) $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

f) 1er cas $\alpha = 1$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

2eme cas $\alpha = -1$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

3eme cas $\alpha^2 \neq 1$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } z \in \mathbb{R} \right\}$.

g) 1er cas $\alpha = 1$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

2eme cas $\alpha = -2$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \text{ pour } t \in \mathbb{R} \right\}$.

3eme cas $\alpha \notin \{1, -2\}$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

h) 1er cas $a = 1$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -by-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

2eme cas $b = 0$ et $a \neq 1$: $\mathcal{S} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} 0$ pour $t \in \mathbb{R}\}$.

3eme cas $a = -2$ et $b \neq 0$:$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} (-a-1)by \\ y \\ by \end{pmatrix} \text{ pour } y \in \mathbb{R} \right\}$.

4eme cas $a \notin \{1, -2\}$ et $b \neq 0$: $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 13

Indication :

On applique l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Réponse :

On trouve $\mathrm{rg}(A) = 3$, $\mathrm{rg}(B) = 2$, $\mathrm{rg}(C) = 3$ et $\mathrm{rg}(D) = 3$

Exercice 14

Indication :

On augmente la matrice de la matrice identité puis on applique l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan i.e. $\boxed{(A|I_3) \sim_L (I_3|A^{-1})}$.

Réponse :

On trouve

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On obtient $D^{-1} = \begin{pmatrix} -34/7 & 60/7 & -5/7 & 3/7 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -4/7 & 5/7 & -1/7 & 2/7 \\ 60/7 & -96/7 & 8/7 & -9/7 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Indication :

L'algèbre des matrices n'est pas intègre on peut avoir $AB = 0$ avec A et B non nulle.
Mais on a $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont inversibles ssi } AB \text{ est inversible}}$.
Donc la propriété analogue à "un nombre est nul" est "une matrice est non inversible".

Solution :

a) On a $AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Si A était inversible alors on trouverait $B = C$ ce qui absurde. Donc A n'est pas inversible.

b) On résout le système linéaire homogène associé à A. On trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Donc les matrices tels que $AF = 0$ sont $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ -t_1 & -t_2 & -t_3 \end{pmatrix}$ pour $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.