TD7 : Dérivabilité - Corrigé

Exercice 1

Indication :

On utilise le théorème de la bijection continue : Si f est strictement monotone et continue sur I un intervalle alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.
De plus f^{-1} est dérivable en $b = f(a) \in f(I)$ si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$.
Et on a la formule $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Solution :

a) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Donc f est continue et strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $f(\mathbb{R}_+^*)$.
On a $\lim_0 f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1+\frac{1}{f^{-1}(y)}} = \frac{f^{-1}(y)}{f^{-1}(y)+1}$.

Exercice 2

Indication :

On raisonne comme dans l'exercice précédent. On peut ici prolonger la fonction en $t = 0$ et regarder le prolongement de la réciproque.

Solution :

La fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ par opération.
Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a $f'(t) = \frac{(1-e^{-t})-te^{-t}}{(1-e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}(e^t - 1 - t)$.
Le signe de f' ne dépend que du signe de $g(t) = e^t - t - 1$.
La fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = e^t - 1 > 0$ ssi $t > 0$.
Donc g atteint un minimum global en $t = 0$ (décroissant puis croissant) avec $g(0) = 0$. Donc g est toujours positive. Ainsi $f' > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

On a $f(t) \sim_{+\infty} te^t \to +\infty$ et $f(t) \sim_{-\infty} te^t \to 0$.
De plus pour $t \neq 0, f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}} = e^t \left(\frac{e^t - e^0}{t-0}\right)^{-1} \to_{t\to 0} e^0(e^0)^{-1} = 1$ comme limite de taux d'accroissement.

Donc f réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ vers $]0, 1[$ et également une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]1, +\infty[$.

Ainsi f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

La bijection réciproque est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ car $f' > 0$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. On peut étudier le prolongement de f' en 0. On trouve $\lim_0 f' = 1/2 \neq 0$. Ainsi f est dérivable en $a = 0$ donc f^{-1} est dérivable en $b = f(a) = 1$ et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 2$.

Exercice 3

Indication :

On dispose de l'équivalence : f est dérivable en a ssi f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a. De plus on a la formule $\boxed{f(a+h) =_{h\to 0} f(a) + hf'(a) + o(h)}$.

Solution :

On a $f(a+h) =_{h\to 0} f(a) + hf'(a) + o(h)$ et $f(a-h) =_{h\to 0} f(a) - hf'(a) + o(h)$.
Donc $f(a+h) - f(a-h) =_{h\to 0} 2hf'(a) + o(h)$.
Et ainsi $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \to_{h\to 0} f'(a)$.

On note $h = x - a \to 0$.
On a $\frac{af(x)-xf(a)}{x-a} = \frac{af(a+h)-(a+h)f(a)}{h}$
$=_{h\to 0} \frac{1}{h}(af(a) + ahf'(a) - af(a) - hf(a) + o(h))$
$=_{h\to 0} af'(a) - f(a) + o(1)$
$\to_{h\to 0} af'(a) - f(a)$.

Exercice 4

Indication :

On commence par utiliser les résultats généraux sur les opérations. Puis on regarde les prolongements éventuelles de dérivabilité : Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim_a f' = l \in \mathbb{R}$ existe et est finie alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Solution :

On a $1 - t^2 = -(t-1)(t+1) > 0$ ssi $t \in]-1, 1[$.
Donc f est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ en tant que composée.
Soit $t \in]-1, 1[$. On a $f'(t) = -\sqrt{1-t^2} + (1-t)\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}$.

De plus pour $t \in]-1, 0[$, $\frac{f(t)-f(-1)}{t+1} = \frac{(1-t)\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}{1+t} = \frac{(1-t)^{3/2}}{(1+t)^{1/2}} \to_{t\to -1} +\infty$.
Donc f n'est pas dérivable -1.

Pour $t \in]0, 1[$, $\frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \frac{(1-t)\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}{t-1} = -\sqrt{1-t^2} \to_{t\to 1} 0$.
Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

Exercice 5

Indication :

En suivant les questions, on arrive à démontrer que f est dérivable sur un voisinage de 0. Puis vérifie une équation différentielle et on la résout.
On peut remarquer qu'il s'agit de la formule d'addition $\boxed{\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}}$.

Solution :

a) Pour $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 2f(0)/(1 - f(0)^2)$.
Donc $f(0) = 0$ ou $1 - f(0)^2 = 2$ qui n'admet pas de solution réelle.
Ainsi $f(0) = 0$.
On sait f est continue en 0 donc $\lim_0 f = f(0) = 0$ et $]-1/2, 1/2[$ est un voisinage de 0 la limite. Donc il existe un voisinage $]-a, a[$ de 0 le point de départ tel que $f(]-a, a[) \subset]-1/2, 1/2[$.

b) Soit $x, h \in]-a, a[$. On a $|f(x)f(h)| = |f(x)|.|f(h)| < (1/2).(1/2) = 1/4$. Donc $f(x)f(h) \neq 1$.
On peut appliquer l'équation fonctionnelle.
On a $f(x+h) = \frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)} \to_{h\to 0} \frac{f(x)+0}{1-0} = f(x)$.
Donc f est continue en x.

c) De même, on a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)} - f(x)\right)$
$= \frac{1}{h}\frac{f(x)+f(h)-f(x)+f(x)^2 f(h)}{1-f(x)f(h)}$
$= \frac{f(h)-f(0)}{h-0}\frac{1+f(x)^2}{1-f(x)f(h)}$
$\to f'(0)(1 + f(x)^2)$
Donc f est dérivable sur $]-a, a[$ et $f'(x) = C(1 + f(x)^2)$ avec $C = f'(0)$ une constante.

d) La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = C(1 + y^2)$.
Donc $\operatorname{Arctan}(y)' = \frac{y'}{1+y^2} = C$ puis $\operatorname{Arctan}(y(x)) = Cx$ donne $y(x) = \tan Cx$.
Puis en réalisant la synthèse, on trouve $f(x) = \tan(Cx)$ pour tout $C \in \mathbb{R}$ convient à la relation : $\tan(C(x+y)) = \frac{\tan(Cx)+\tan(Cy)}{1-\tan(Cx)\tan(Cy)}$.

Exercice 6

Indication :

a) Appliquer le théorème de Rolle sur une fonction auxiliaire.

b) Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.

c) On peut en déduire la limite à droite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $x \to a^+$. Puis on conclut en symétrisant le raisonnement.

Solution :

a) On introduit $h(t) = f(t)g(x) - g(t)f(x)$.
La fonction h est dérivable sur $[a, x]$ et vérifie $h(a) = h(x) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c(x) \in]a, x[$ tel que $h'(c(x)) = 0$.
Or $h'(t) = f'(t)g(x) - g'(t)f(x)$ d'où $f'(c(x))g(x) = g'(c(x))f(x)$.

b) Par l'absurde si il existe $b \in I$ avec $b \neq a$ et $g(b) = 0 = g(b)$. Alors il existe $c \in I$ entre a et b tel que $g'(c) = 0$ d'après le théorème de Rolle. Absurde car g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

c) On note $l = \lim_a f'/g'$.
Pour $x > a$, on a $a < c(x) < x$ donc par théorème d'encadrement $\lim_{x \to a^+} c(x) = a$.
D'après b) le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe.
Puis d'après a), $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \to_{x \to a^+} l$ i.e. $\lim_{a^+} f/g = l$.
On peut faire une construction analogue à la question a) lorsque $x < a$
et obtenir $\lim_{a^-} f/g = l$ puis en déduire la règle de l'Hôpital.

Exercice 7

<u>**Indication**</u> **:**

On recherche à appliquer le TAF sur f puis l'IAF sur f'.

<u>**Solution**</u> **:**

Il existe un $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ d'après le TAF.
Puis on a $|f'(c)| = |f'(c) - f'(a)| \leq (c - a) \sup |f''|$ par l'IAF.
De même $|f'(c)| = |f'(b) - f'(c)| \leq (b - c) \sup |f''|$.
Ainsi on trouve par addition $2|f'(c)| \leq (c - a + b - c) \sup |f''| = (b - a) \sup |f''|$.
Ainsi $|f(b) - f(a)| = (b - a)|f'(c)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Exercice 8

<u>**Solution**</u> **:**

Si $f(b) > 0$ alors $f'(b) < 0$.
On sait d'après le TAF qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $f'(d) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)}{b-a} > 0$.
Alors $f'(d) > 0$ et $f'(b) < 0$ avec f' continue. D'après le TVI, il existe $c \in]d, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Si $f(b) < 0$ alors $f'(b) > 0$ et on peut construire de manière analogue $d \in]a, b[$ tel que $f'(d) = \frac{f(b)}{b-a} < 0$. Ainsi par le TVI, la fonction f' s'annule.

Exercice 9

<u>**Solution**</u> **:**

Pour $x \in [0, 1]$, on a $f'(x)f'(f(x)) = f'(x)$ en dérivant la relation.
Donc $f'(x) = 0$ ou $f'(f(x)) = 1$. On note $[a, b] = f([0, 1]) \subset [0, 1]$ le segment image.
En particulier, $\forall y \in [a, b], f'(y) \in \{0, 1\}$ est positif. Donc f est croissante sur $[a, b]$.
Donc $[f(a), f(b)] = f([a, b]) = f(f([0, 1])) = f([0, 1]) = [a, b]$. Donc $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

La fonction est non constante donc $a < b$.
Pour $c \in]a, b[$, on a $f(c) - f(a) = (c - a)k_1$ avec $k_1 = f'(d_1) \in \{0, 1\}$ d'après le TAF et de même $f(b) - f(c) = (b - c)k_2$ avec $k_2 = f'(d_2) \in \{0, 1\}$.
Or $f(b) - f(a) = [f(b) - f(c)] + [f(c) - f(a)] = b - a = k_1(c - a) + k_2(b - c)$ impose $k_1 = k_2 = 1$.
Puis $f(c) = f(a) + c - a = c$. Et donc f est l'identité sur $[a, b]$.

Si $a > 0$ alors pour $0 < t < a$, $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \frac{f(t)-a}{t-a} \leq 0$ car $f(t) \in f([0, 1]) = [a, b]$. Or $\lim_a \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a) = 1 \leq 0$ ce qui est absurde. Donc $a = 0$.

De même si $b < 1$ pour $b < t < 1$ on aurai $\frac{f(t)-f(b)}{t-b} \leq 0$ avec $\lim_b \frac{f(t)-f(b)}{t-b} = 1$ Absurde.

Donc f est l'identité sur $[0, 1]$.

Exercice 10

Indication :

On peut utiliser la caractérisation pour les fonctions de classe C^2 :

$$\boxed{f \text{ est convexe ssi } f' \text{ est croissante ssi } f'' \geq 0}$$

Solution :

a) Les deux fonctions sont de classe C^2 alors $g \circ f$ est également de classe C^2.
On a $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ puis $(g \circ f)'' = f'' \times g' \circ f + (f')^2 \times g'' \circ f$.
On sait que $f'' \geq 0$ car f convexe puis $g' \geq 0$ et $g'' \geq 0$ car g croissante et convexe.
Donc $(g \circ f)'' \geq 0$ et on en déduit que $g \circ f$ est convexe.

b) La fonction f est strictement croissante et continue donc elle réalise une bijection de I vers $f(I)$. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe C^2 sur $f(I)$.
On a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ et $(f^{-1})'' = \frac{-(f^{-1})' f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^2} = \frac{-f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3} \leq 0$.
Car f est convexe donc $f'' \geq 0$ et f est croissante donc $f' \geq 0$ alors f^{-1} est concave.
Si f' s'annule alors notons $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. Par croissance de f', on en déduit que $\forall x \leq x, f'(x) \leq f'(c) = 0$. Donc f est décroissante sur $]-\infty, c]$. Absurde par hypothèse.

Exercice 11

Indication :

On démontre la relation par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Le cas $n = 2$ correspond à la définition de la convexité.

Solution :

a) On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation $n = 1$ on a $\alpha_1 = 1$ et $f(\alpha_1 x) = f(x) = \alpha_1 f(x)$.
$n = 2$ on a $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ et comme f est convexe :
$f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f(x_2)$.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit acquis.
Soient $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in [0,1]$ et $x_1, ..., x_{n+1} \in [a,b]$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$.
On pose $m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ de sorte que $m + \alpha_{n+1} = 1$.
On pose également $y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in [a,b]$.
Ainsi $f(my + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq m f(y) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$ par convexité.
Puis $f(my) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{m} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{m} f(x_k)$
par HR avec la famille de coefficients $\beta_k = \frac{\alpha_k}{m}$.
En effet, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.
Ainsi $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = f(my + \alpha_{n+1} x_{n+1})$
$\leq m f(y) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$
$\leq m \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{m} f(x_k) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$
$= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k)$.

b) La fonction exp est convexe car $\exp'' > 0$.
Donc pour $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ et $1/n + ... + 1/n = 1$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n} e^{y_k/n} = \exp(\sum_{k=1}^{n} y_k/n) \leq \sum_{k=1}^{n} e^{y_k}/n.$$

En posant $x_k = e^{y_k} > 0$, on trouve $(x_1...x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$.