TD9 : Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

Exercice 1 ($\star$) On cherche à résoudre l'équation pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $26x + 15y = 1$.

a) Appliquer l'algorithme d'Euclide et déterminer une solution particulière.

b) En déduire, grâce au théorème de Gauss, l'ensemble des solutions de l'équation.

Exercice 2 ($\star\star$) Déterminer les solutions $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ de l'équation $10x + 15y + 7z = 11$.

Exercice 3 ($\star\star$) Montrer que $pgcd(a, b) = 1 \Leftrightarrow pgcd(a + b, ab) = 1$.

Exercice 4 ($\star$) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$17 | 7^{8n+1} + 10(-1)^n, \quad 11 | 9^{5n+2} - 4 \text{ et } 6 | 10^{3n+2} - 4^{n+1}.$$

Exercice 5 ($\star$) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 6 ($\star$) Montrer que les nombres réels suivants sont irrationnels :

$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,, \sqrt{2} + 1\,,\ \sqrt{2} + \sqrt{3}\,,\ \sqrt{6}\,.$$

Exercice 7 ($\star\star$) Soit p un nombre premier. On recherche à démontrer le <u>Petit Théorème de Fermat</u> : $\quad \forall n \in \mathbb{Z}, n^p \equiv n[p]$.

a) Montrer que si $k \in [\![1, p-1]\!]$ alors p divise $\binom{p}{k}$.

b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, p | n^p - n$ et conclure.

Exercice 8 ($\star$) Soient p et q deux nombres premiers tels que l'équation $x^2 - px + q = 0$ ait deux solutions distinctes m et n deux entiers naturels.

a) A partir de la forme factorisée du trinôme montrer que $p = n + m$ et $q = mn$.

b) En déduire les valeurs de p et q.

Exercice 9 ($\star$) Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers.

a) Montre que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$.

b) Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors n est un nombre premier.

c) Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 10 ($\star\star$) On appelle nombre de Fermat les entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$.

a) Montrer que $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$.

b) Que peut-on dire d'un diviseur commun de deux nombres de Fermat.

c) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 11 ($\star\star$) On appelle nombre parfait tout entier naturel n dont la somme de tous ses diviseurs positif est égale à $2n$.

a) Vérifier que $6, 28$ et 496 sont parfaits.

b) Vérifier que $6, 28$ et 496 sont de la forme $2^n(2^{n+1} - 1)$ avec n entier et $2^{n+1} - 1$ premier.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^{n+1} - 1$ est premier ssi $2^n(2^{n+1} - 1)$ est parfait.

d) Donner un CNS pour que un entier soit parfait.

Exercice 12 ($\star$) On suppose $p > 3$ premier. Montrer que $p^2 = 1[24]$.