TD 13 : Espace vectoriel de dimension finie

13.1 Famille de vecteurs

Exercice 1 ($\star$) On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$.

- **a)** Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_2, v_3) et (v_1, v_3).
- **b)** La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 2 ($\star$) Déterminer si les familles suivantes sont libres, génératrices, ou des bases :

- **a)** $\left\{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$
- **b)** $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
- **c)** $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$
- **d)** $\left\{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Exercice 3 ($\star$) Les vecteurs suivants appartiennent-ils à Vect $\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right)$?

$$\begin{pmatrix}-3\\2\\-3\\8\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}-1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\1-\alpha\\\alpha-1\\\alpha-7\end{pmatrix} \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 ($\star$) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés par les familles de vecteurs suivants :

- **a)** $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$
- **b)** $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\0\end{pmatrix}\right\}$
- **c)** $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Exercice 5 ($\star$) On considère la famille de polynômes suivantes de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P_1(x) = (1-X)^3\,,\ P_2(x) = X(1-X)^2\,,\ P_3(x) = X^2(1-X)\,,\ P_4(x) = X^3\,.$$

Calculer les coordonnées de P_j dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$
En déduire que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 6 ($\star$) Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, ..., e_n)$.
Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on pose $\epsilon_i = e_1 + ... + e_i$.

- **a)** Montrer que $B' = (\epsilon_1, ...\epsilon_n)$ est une base de E.
- **b)** Exprimer les composantes dans B' d'un vecteur en fonction de ses composantes dans B.

Exercice 7 ($\star\star$) Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, ..., e_n)$.
Pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on pose $(w_n)_{n\geq 0_i} = e_i + e_{i+1}$ et $w_n = e_n + e_1$.
Calculer le vecteur $u = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k w_k$.
En déduire que la famille $(w_1, .., w_n)$ est une base ssi n est impair.

Exercice 8 ($\star\star$) Soit $(u_1, ..., u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Montrer que :

- **a)** Si $\begin{cases}(u_1, ..., u_n) \text{ est libre}\\ u_{n+1} \notin \text{Vect}\,(u_1, ..., u_n)\end{cases}$ alors $(u_1, ..., u_n, u_{n+1})$ est libre.
- **b)** Si $\begin{cases}(u_1, ..., u_n, u_{n+1}) \text{ est génératrice de } E\\ u_{n+1} \in \text{Vect}\,(u_1, ..., u_n)\end{cases}$ alors $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice de E.

13.2 Sous-espace vectoriel

Exercice 9 ($\star$) Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

a) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x+y+z=0$ et $2x-y=0\}$

b) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x-y+1=0\}$

c) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $xy=0\}$

d) $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq 0\}$

e) $J = \{(u+v, u-v)$ pour $u,v \in \mathbb{R}\}$

Exercice 10 ($\star$) Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x+2y+3z=0\}$

Exercice 11 ($\star\star$) On appelle *matrice magique* d'ordre n toute matrice $A = (a_{j,k}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que les sommes des éléments de chaque colonne, de chacune ligne et de chacune des deux diagonales soit égales à un même nombre, qu'on appelle la *somme* de la matrice magique. On désigne par E l'ensemble des matrices magiques.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

b) Soit F l'ensemble des matrices magiques de *somme nulle* et par G l'ensemble des matrices *constantes*, autrement dit des matrices dont tous les coefficients sont égaux. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

c) Dans l'espace vectoriel F, on considère les sous-ensembles S et A constitués respectivement des matrices (magiques de somme nulle) :
— *symétriques* (celles qui vérifient $a_{j,k} = a_{k,j}$ pour tout couple (j,k)),
— *antisymétriques* (celles qui vérifient $a_{j,k} = -a_{k,j}$ pour tout couple (j,k)).
Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans F.

d) On suppose désormais $n = 3$. Déterminer tous les éléments de S et de A. En déduire la matrice magique d'ordre 3 la plus générale.

Exercice 12 ($\star$) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension, alors il existe un supplémentaire G commun de F_1 et F_2, c'est à dire vérifiant $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.

Exercice 13 ($\star$) Soit $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } x+y+z+t=0 \right\}$ et $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } x+y=z+t \right\}$.

a) Montrer que F_1 et F_2 sont des espaces vectoriels.

b) Calculer $\dim_{\mathbb{R}}(F_1)$, $\dim_{\mathbb{R}}(F_2)$ et $\dim_{\mathbb{R}}(F_1 \cap F_2)$.

Exercice 14 ($\star\star$) Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E, tels que : (i) $F+H = G+H$; (ii) $F \cap H = G \cap H$; (iii) $F \subset G$.
Montrer que $F = G$.
Le résultat subsiste-t-il si l'on supprime une des hypothèses ?

Exercice 15 ($\star\star$) Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.

a) On suppose que $F \subset H$. Montrer qu'alors $(F+G) \cap H = F + (G \cap H)$.

b) En déduire que :

$$(F \subset H \text{ ou } G \subset H) \ \Rightarrow\ (F+G)\cap H = F\cap H + G\cap H \text{ et } F+(G\cap H) = (F+G)\cap(F+H)$$

c) Montrer que si H ne contient ni F ni G, alors dans les égalités précédentes une inclusion reste vraie et donner un exemple où l'on n'a pas l'égalité en prenant $E = \mathbb{R}^2$.