TD 11 : Analyse asymptotique

11.1 Recherche d'équivalent

Exercice 1 ($\star$) Donner un équivalent simple de suites suivantes :

a) $n^4 + 3n^2 - 5$
b) $3^n - n^3 + 10$
c) $\ln^n(n) + 3^n - n^9$
d) $\frac{3^n+2^n n^2}{\ln^2(n)-n^2}$.
e) $\ln(1+n)\ln(1+\frac{1}{n})$
f) $\frac{\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3}-n\sqrt{n}}$
g) $\frac{1+a^n+n^\alpha}{\ln^\beta n+n^\alpha}$ suivant $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}_+^*$.
h) $\sqrt{n^4+3n} - n^2$
i) $1 - e^{2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$
j) $\ln\left(n + \frac{1}{n^5}\right) - \ln n$
k) $\sin\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$
l) $\ln(\cos\frac{1}{n}) + \cos(\tan\frac{2}{n}) - 1$
m) $\sin\ln\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)$

Exercice 2 ($\star$) Soient u et v des suites réelles de limites nulles.
Montrer que $e^{u_n} - e^{v_n} \sim u_n - v_n$.

11.2 Recherche d'équivalent de suite autonome

Lemme de Cesàro :
Si la suite $u_n \to l$ alors la suite $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k \to l$.

Exercice 3 ($\star\star$) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par $0 < u_0 < 1$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$.

a) Montrer que la suite converge vers une limite l que l'on précisera.
b) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}-l} - \frac{1}{u_n-l}\right)_{n\geq 0}$ converge et préciser sa limite.
c) En utilisant le lemme de Cesàro, déterminer un équivalent de $(u_n - l)$.

Exercice 4 ($\star\star$) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \geq 1$
b) Montrer que u_n est croissante.
c) Montrer que la suite u_n tend vers $+\infty$.
d) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim 2$.
e) En utilisant le lemme de Cesàro, en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 5 ($\star\star$) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + \exp(-u_n)$.

a) Montrer que u_n croit vers $+\infty$.
b) Déterminer la limite de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.
c) En utilisant le lemme de Cesàro, en déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 6 ($\star\star$) On définit une suite (u_n) par $u_0 \in]0, \pi[$ et la relation $u_{n+1} = \sin u_n$.

a) Montrer que $\lim u_n = 0$.
b) Donner un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
c) Calculer la limite de $v_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}$.
d) En utilisant le théorème de Cesàro, en déduire un équivalent simple de u_n.

11.3 Développement limité

Exercice 7 ($\star$) Calculer le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre indiqué :

a) $DL_3(0) : \exp(\sin x)$

b) $DL_4(0) : \ln(\cos x)$

c) $DL_5(0) : \frac{1}{1-x^2-x^3}$

d) $DL_4(0) : (1+x)^x$

e) $DL_4(0) : \ln\left[\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right]$

f) $DL_3(0) : \text{Arctan}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)$

Exercice 8 ($\star$) Pour $a > 0$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $f_a(x) = \frac{x^a \ln x}{x^2-1}$.

a) Montrer que f_a se prolonge par continuité à $\mathbb{R}_+$.

b) Le prolongement ainsi obtenue est-il dérivable en 0 et en 1 ?

Exercice 9 ($\star$) Donner des équivalents simples des fonctions suivants pour $x \to 0$:

a) $\frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} - \frac{x}{3}$

b) $\tan(\tan x) - \text{Arcsin}\, x$

c) $x^3 \sqrt[3]{x-1} + x^3$.

Exercice 10 ($\star$) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\text{sh}^3 x}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln \sin x}\right]$

d) $\lim_{x\to 0^+} \left[e - (1+x)^{1/x}\right]^x$

11.4 Avec recherche d'idées

Exercice 11 ($\star$)

a) En utilisant un relation simple entre tan et tan$'$, calculer le $DL_7(0)$ de tan.

b) Adapter cette méthode pour calculer le $DL_7(0)$ de th.

Exercice 12 ($\star$) Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \cos x - \frac{a+bx^2}{1+cx^2}$ est négligeable devant x^n avec n un entier maximal. Donner alors un équivalent simple de $f(x)$ en $x \to 0$.

Exercice 13 ($\star\star$) Montrer que l'application $f :]-1, +\infty[\to]-\frac{1}{e}, +\infty[, x \to xe^x$ est un bijection de classe C^∞ dont la réciproque est de classe C^∞.
Calculer un développement limité de $f^{-1}(x)$ à l'ordre 2 en $x \to 0$.

Exercice 14 ($\star\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \mapsto \ln(1+x^2) - x$.

a) Montrer que f est bijective.

b) Calculer un $DL_4(0)$ de f.

c) En déduire un $DL_4(0)$ de f^{-1}

Exercice 15 ($\star\star$) Soit $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que f admet un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais pas à l'ordre 3.

b) Montrer que f se prolonge de manière C^1 en 0 et préciser les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

c) Calculer le taux d'accroissement de $f'(x)$ en 0. La fonction f est-elle C^2 en 0 ?

11.5 Problèmes

Exercice 16 ($\star\star$) On recherche à étudier la fonction, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}} \text{Arctan}\sqrt{x}$.

a) Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0.

b) En déduire le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ et la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.

c) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$. (On pourra étudier g vérifiant $g(\sqrt{x}) = f(x)$).

d) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels qu'on dispose du développement asymptotique suivant :

$$f(x) =_{x\to+\infty} a\sqrt{x} + b + \frac{c}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

e) Tracer la courbe de la fonction f en précisant les tangentes et asymptotes connues.

Exercice 17 ($\star\star\star$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x + x^2 - nx$.

a) Montrer que f_n admet un minimum μ_n atteint en un unique $x_n \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $x_n \sim_{n\to+\infty} \ln n$.

c) En déduire un équivalent de μ_n.