TD 14 : Application linéaire

14.1 Contexte explicite

Exercice 1 ($\star$) Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer l'image et le noyau de chacune d'entre elles :

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \binom{x}{y} \mapsto 2x - 3y$.

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \binom{x}{y} \mapsto \binom{x-2y}{3x-6y}$.

c) $f_3 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} ix-y \\ x+iy \end{pmatrix}$.

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+5y \\ x-2y \\ 2x-y \end{pmatrix}$.

e) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+5y-z \\ -x+2y-2z \end{pmatrix}$.

Exercice 2 ($\star$) Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\,,\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,,\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,,\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\,.$$

Calculer $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le noyau et l'image de f.

Exercice 3 ($\star$) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$f(v_1) = e_1,\ f(v_2) = e_2 \text{ et } f(v_3) = e_3\,.$$

b) Montrer qu'il existe une infinité d'applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telles que

$$f(v_1) = e_1,\ f(v_2) = e_2 \text{ et } f(v_3) = 2e_1 - e_2\,.$$

Exercice 4 ($\star$) On voit ici $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.

a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$.

b) A quelle condition f est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?

Exercice 5 ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f((u_n)_{n\geq 0}) = (u_{n+1} - u_n)_{n\geq 0}$.

a) Montrer que f est linéaire et calculer son noyau et son image.

b) Démontrer que les suites géométriques de même raison forme un espace vectoriel.

Exercice 6 ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $f(P) = P + (1 - X)P'$.

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

14.2 Contexte abstrait

Exercice 7 ($\star$) Soit E de dimension n et f un endomorphisme nilpotent d'ordre n. On suppose ainsi $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit $u \notin Ker(f^{n-1})$.
Montrer que la famille $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Exercice 8 ($\star\star$) Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ des applications entre deux espaces vectoriels.

a) Montrer que $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = h \circ f$.

b) Montrer que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g \circ h$.

Exercice 9 ($\star\star$) Soient p et q deux projecteurs distincts et non nuls de E.

a) Montrer que p et q sont non colinéaires.

b) Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.

c) Dans ce cas calculer l'image et le noyau de $p + q$.

Exercice 10 ($\star$) Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des assertions : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 11 ($\star\star$) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies et $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

a) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

b) En déduire que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq rg(\lambda f + g)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exercice 12 ($\star\star$) Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. On définit $f : E_1 \times E_2 \to E$ par $f(u_1, u_2) = u_1 + u_2$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) Quel formule démontre le théorème du rang appliqué à f.

Exercice 13 ($\star$) Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, E)$ qui vérifient $f \circ g \circ f = f$.

a) Montrer que pour tout $v \in E, v - (g \circ f)(v) \in \mathrm{Ker} f$.

b) Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}(g \circ f)$.

c) En déduire que $\mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(g)$.

Exercice 14 ($\star$) Soit E un espace de dimension finie n. On dit qu'un sous-espace H est un hyperplan si H admet une droite comme supplémentaire.

a) Calculer la dimension de H puis de $H_1 \cap H_2$ pour deux hyperplans.

b) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un hyperplan.

c) Montrer que tout hyperplan est le noyau d'une telle application.

Exercice 15 ($\star\star$) Soit E un espace de dimension finie. Soient $f : E \to \mathbb{R}^2$ et $p_1, p_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définies par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$.

a) Montrer que $\mathrm{rg}(f) \in \{0, 1, 2\}$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p_1 \circ f) \cap \mathrm{Ker}(p_2 \circ f)$.

c) On suppose que $\mathrm{rg}(f) = 1$. Montrer que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont liées dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$.

d) Montrer que tout espace de dimension $n - 2$ est le noyau d'une application surjective de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}^2)$.