

## TD 15 : Dénombrément

### 15.1 Dénombrément théorique

**Exercice 1** (★) Soit  $n$  un entier. Calculer  $\text{Card}\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n = x + 2y\}$ .

**Exercice 2** (★★) Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

- Calculer le nombre de surjection de  $E$  dans  $\{1, 2\}$ .
- Calculer le nombre de surjection de  $E$  dans  $\{1, 2, 3\}$ .
- Calculer le nombre de surjection de  $E$  dans  $E$ .
- Calculer le nombre d'application non surjective de  $E$  dans  $E$ .

**Exercice 3** (★★) Soit  $E$  l'ensemble des entiers écrit en base 10 avec exactement les six nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Par exemple : 123456, 214356  $\in E$ .

- Calculer le cardinal de  $E$ .
- On peut classer par ordre croissant ces entiers. Quel est le rang de 362145 ?
- Quel est le 500-ième nombre de  $E$  ?
- Calculer la valeur de la somme :  $\sum_{x \in E} x$ .

**Exercice 4** (★) Etablir les formules suivantes, pour deux entiers  $n \geq p \geq 0$  :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Ecrire la seconde formule pour  $p = 0, 1, 2, 3$  et retrouver la valeur des sommes :

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3.$$

**Exercice 5** (★★) (Formule de Vandermonde) On note  $E = A \cup B$  une partition de  $E$  avec  $\text{Card}A = n$  et  $\text{Card}B = m$ .

- Montrer que  $\phi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(E), (X, Y) \mapsto X \cup Y$  est une bijection dont on précisera la réciproque.
- On fixe  $k \in \mathbb{N}$ . En déduire que  $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$ .

**Exercice 6** (★) Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le nombre de partitions d'un ensemble de  $np$  éléments en  $n$  parties de cardinal  $p$ .

Combien y a-t-il de choix de trinômes de colles possibles dans une classe de 45 élèves ?

### 15.2 Application aux probabilités

**Exercice 7** (★★) On considère un jeu de 32 cartes à jouer. Et on regarde les mains de 5 cartes possibles. Calculer le nombre puis la probabilité des mains suivantes :

- un full : c'est à dire une paire et un brelan.
- un carré : c'est à dire 4 cartes identiques.
- un brelan : c'est à dire 3 cartes identiques (et ni un carré ni un full).
- deux paires et pas de meilleur combinaison.
- une paire : c'est à dire 2 cartes identiques et pas de meilleur combinaison.

**Exercice 8** (★) Un lot de  $n$  balles sont rangées au hasard dans  $n$  boites, chacune pouvant contenir toutes les balles. Quelle est la probabilité qu'une boite reste vide ?

**Exercice 9** (★) Huit personnes garent leurs huit voitures dans un parking de 12 places alignées. Quelle est la probabilité que les quatre places restantes soient adjacentes ?

**Exercice 10** (★) Une boîte contient 90 bonnes vis et 10 vis défectueuses. On en prend 10 au hasard. Quelle est la probabilité de n'avoir pris aucune vis défectueuse ?

**Exercice 11** (★) Dix paires de chaussures sont dans une boîte, quatre chaussures sont prises au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir une paire parmi les quatre ?

**Exercice 12** (★) Cinq dés équilibrés à 6 faces sont lancés. Quelle est la probabilité qu'au moins trois d'entre eux montrent la même face ?