TD 17 : Variables aléatoires

17.1 Exercice formel

Exercice 1 ($\star$) Soit A, B, C trois évènements tels que $\mathbb{P}(A) = 1/2, \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 5/12, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/3, \mathbb{P}(A \cap C) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4$.
Déterminer la loi de $X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$.

Exercice 2 ($\star$) Soit A et B deux évènements indépendants vérifiant $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$.
Déterminer les lois des variables aléatoires : $Y = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ et $Z = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Exercice 3 ($\star\star$) Soit n un entier naturel et soit $X : \Omega \to [\![1, n]\!]$ une variable aléatoire suivant la loi est donnée par : $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = ak(n + 1 - k)$:

a) Trouver a pour que la loi soit bien unitaire.
b) Calculer l'espérance de X. On pourra raisonner par symétrie.
c) Calculer l'espérance de $1/X$.

Exercice 4 ($\star\star$) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

a) Déterminer la valeur de $k \in [\![0, n]\!]$ qui maximise la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
b) Calculer l'espérance de $1/(X + 1)$.
c) On suppose que $p = 1/2$ calculer l'espérance de 3^X.

Exercice 5 ($\star$) Soit une variable aléatoire $X : \Omega \to [\![1, n]\!]$ suivant la loi uniforme $U(n)$ et on pose $Y = 1 + X^2$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
b) Caculer $\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

17.2 Modélisation

Exercice 6 ($\star$) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$. On en tire deux au hasard et sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.

a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}([X \leq k])$.
b) En déduire la loi que suit la variable aléatoire X.

Exercice 7 ($\star$) Dans une urne il y a k boules blanches et $n - k$ boules noires avec $1 \leq k \leq n - 1$. On les tire une à une et sans remise. On introduit une variable aléatoire X associée au rang de la dernière boule blanche tirée.
Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

Exercice 8 ($\star$) Une urne contient trois boules : une rouge, une verte et une bleue. On tire successivement n boules avec remises et on compte le nombre de changement de couleurs entre deux tirages successifs. On note X la variable aléatoire ainsi obtenue.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 9 ($\star$) Deux joueurs A et B lance n fois une pièce.

a) Calculer la probabilité qu'il obtienne le même nombre de piles.
b) Déterminer l'espérance et la variance de l'écart du nombre de piles de chacun des joueurs.

Exercice 10 ($\star\star$) Un dé à 16 faces est pipé de telle sorte que le probabilité d'obtenir la face numéro 1 est deux fois celle d'obtenir le numéro 2 qui est elle même deux fois celle d'obtenir le numéro 3 et ainsi de suite. Soit X la variable aléatoire du résultat d'un lancé de dés.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 11 ($\star\star\star$) Montrer que l'on ne peut pas piper deux dés à 6 faces de sorte que la somme des résultats suivent une loi uniforme.

Exercice 12 ($\star\star$) On tire avec remise deux jetons d'une urne contenant trois jetons numérotés de 1 à 3. On note X la variable aléatoire désignant le premier numéro et Y le second. On pose $U = \sup(X, Y)$.

a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, U).

b) En déduire les lois marginales des variables aléatoires X et U.

c) Calculer l'espérance et la variance des variables X, Y et U.

Exercice 13 ($\star$) On lance une pièce de monnaie indéfiniment jusqu'à obtenir pile pour la première fois. La probabilité d'obtenir face est q et celle d'obtenir pile est $p = 1 - q$. Soit X le rang du tirage qui amène le dernier face consécutif. Calculer la loi de X et son espérance.

Exercice 14 ($\star\star$) Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune trois boules numérotées $1, 2$ et 3 pour U_1 et $4, 5$ et 6 pour U_2. On lance un dés numérotés de 1 à 6 et on change d'urnes le numéro ainsi obtenu. On note X_n le nombre de boules dans l'urne U_1 au bout de n lancés de dés.

a) Pour tout couple d'entiers $(k, l) \in [\![1, 6]\!]^2$, exprimer la probabilité conditionnelle de $X_{n+1} = k$ sachant $X_n = l$.

b) En déduire la relation de récurrence sur les espérances : $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$.

c) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 15 ($\star\star$) Une urne contient une proportion p inconnue de boules blanches. On réalise n tirages avec remises et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_n.

b) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

c) Combien faut-il faire de tirages pour obtenir une approximation de p à 10^{-2} avec un risque d'erreur inférieur à 5%.

Exercice 16 ($\star\star$) Dans une ferme qui possède 100 vaches, on souhaites construire deux étables de même taille qui puisse accueillir toutes les vaches. Si on laisse le choix aux vaches de leur étable, quelle doit-être la capacité minimale de chaque étable pour que la répartition puisse se faire avec une probabilité d'au moins 95%.