# TD 18 : Matrice et application linéaire

**Exercice 1** ($\star$) Soient $(e_1, e_2, e_3)$ et $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Soit $u$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \\ -x+z \\ -y+z \end{pmatrix}.$$

**a)** Ecrire la matrice de $u$ dans les bases canoniques.

**b)** Montrer que $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

**c)** Ecrire la matrice de $u$ dans les bases $(e_1, e_2, e_3)$ et $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$.

**Exercice 2** ($\star$) On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $P$ d'équation $z = x - y$ et la droite $D$ d'équation $x = -y = z$. Montrer que ces espaces sont supplémentaires et écrire la matrice dans la base canonique de la projection sur $P$ le long de $D$. En déduire la matrice de la symétrie associée.

**Exercice 3** ($\star$) Soient $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme $u$ définie par $u(e_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

**a)** Ecrire la matrice de $u$ dans la base canonique.

**b)** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

**c)** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

**d)** Montrer que l'application $Id - u$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 4** ($\star$) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $P_k = (X-a)^k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

**a)** Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**b)** Calculer les matrices de passage entre ces deux bases.

**c)** En déduire l'inverse de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5** ($\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**a)** On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice $A$. Calculer l'image par $f$ du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**b)** On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice $A$. Calculer l'image par $f$ du polynôme $P(x) = 3X + 4$.

**Exercice 6** ($\star$) Soit $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2, f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3 \text{ et } f(e_3) = e_1 - e_3.$$

Ecrire la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.

**Exercice 7** ($\star$) On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

**a)** Montrer que $u$ est un endomorphisme et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

**b)** Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker} u$ et $\mathrm{Im} u$.

**c)** Plus généralement déterminer les sous-espaces $\mathrm{Ker} u^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.