TD 23 : Calcul différentiel

Exercice 1 ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$.
   Montrer que g est de classe C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$.
   Montrer que h est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 2 ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x, x) = f'(x)$.

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 3 ($\star\star$) On définit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}$.

Montrer que f admet un prolongement par continuité en $(0, 0)$. Est-ce que la fonction admet des dérivées partielles en $(0, 0)$? On pourra exprimer f en cordonnée polaire.

Exercice 4 ($\star\star$) On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Montrer qu'elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$. La fonction est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 5 ($\star$) On définit $f(x, y) = \text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\,(y) - \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ sur $\mathbb{R}^2$ lorsque cela est possible.

Déterminer le domaine D de définition de f. Montrer que f est différentiable sur D et calculer ∂f. En déduire la valeur de f sur chacune des composantes connexes de D.

Exercice 6 ($\star\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

On dit que f est harmonique si $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

On note (ρ, θ) les coordonnées polaires. Déterminer les fonctions harmoniques telles que $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$.

Exercice 7 ($\star$) Résoudre l'équation au dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

On pourra faire le changement de coordonnées polaires.

Exercice 8 ($\star$) Résoudre l'équation au dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 2y^4$$

On pourra étudier la fonction $g(t) = f(tx_0, ty_0)$ pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

Exercice 9 ($\star\star$) On dit que $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ est homogène si il existe une fonction $p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = p(t)f(x, y).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(t) = t^\alpha$.

Montrer que f est homogène ssi $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x, y)$.

Déterminer f en passant en coordonnées polaires.

Exercice 10 ($\star$) Déterminer les extrema de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ et de $g(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.