TD 22 : Séries numériques

Exercice 1 ($\star$) Montrer que si la fonction g est continue positive et décroissante sur $]0,+\infty[$, alors on a :

$$\int_1^{n+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq g(1) + \int_1^n g(x)dx$$

En déduire le comportement de la suite définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 2 ($\star$) Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite de nombres réels.

a) Montrer que, si la série de terme général u_n est absolument convergente, il en est de même pour la série de terme général u_n^2.

b) Donner l'exemple d'une suite $(u_n)_{n>0}$ telle que la série de terme général u_n soit convergente mais pas la série de terme général u_n^2.

Exercice 3 ($\star$) On pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

a) Montrer qu'on a $u_n \sim v_n$, où v_n est le terme général d'une série convergente.

b) Etudier la série de terme général : $u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Quel résultat de cours illustre cet exercice ?

Exercice 4 ($\star$) Discuter en fonction du paramètre $q > 0$ de la nature de la série $\sum \frac{q^n}{(1+q^n)^2}$

Exercice 5 ($\star$) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On définit $v = \Delta u$ la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de ses différences successives, i.e. $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Calculer les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} v_n$ pour tout entier N.

b) Montrer que la série $\sum v_n$ converge ssi la suite u converge. Dans ce cas, exprimer la valeur de la somme.

c) Montrer que, pour toute suite v , il existe une suite u telle que $v = \Delta u$. Une telle suite u est-elle unique ?

d) Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries :

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}, \sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}, \sum \frac{1}{n^3 - n}$$

$$\sum \sin \frac{\pi}{4n^2-1} \sin \frac{2n\pi}{4n^2-1} \text{ et } \sum \frac{1}{n+1}\big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{\ln n}{n}\big)$$

Exercice 6 ($\star$) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{2^n+5}{3^n-11}, \quad \sum \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum \frac{2^n}{n!}, \quad \sum \frac{1}{n^2}, \quad \sum n^{lna} (a>0), \quad \sum \frac{\ln n}{n},$$

$$\sum n^2 \sin(2^{-n}), \quad \sum \big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n, \quad \sum \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{n^2}, \quad \sum \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \quad \sum \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{n},$$

$$\sum \frac{\ln(n)}{n^2}, \quad \sum \frac{n + \ln n}{n^2+1}, \quad \sum \frac{1}{n^3 \ln n}, \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}, \quad \sum e^{-\sqrt{n}},$$

$$\sum \big(\frac{3n}{4n-1}\big)^{2n+1}, \sum \frac{a^n}{1+b^n}(a,b>0), \sum \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}(a,b>0), \sum (n^6+3)^a - (n^2+2)^{3a} (a \in \mathbb{R})$$

Exercice 7 ($\star$) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de termes positifs.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice 8 ($\star$) En utilisant la règle d'Alembert, déterminer la nature des séries :

$$\sum \frac{n!}{n^n}, \sum \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}, \sum \frac{5^n n^2}{7^n}$$

Exercice 9 ($\star\star$) Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et $b_n = \ln a_n$.

a) En étudiant la série télescopique, $\sum (b_n - b_{n-1})$, montrer que la suite (a_n) a une limite A strictement positive.

b) On suppose connu le fait que $\lim \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} = \pi$. En déduire l'équivalent de Stirling : $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$.

c) En utilisant l'équivalent de Stirling, déterminer la nature de la série $\sum \frac{(2n)!}{n! a^n n^n}$, pour $a > 0$.

Exercice 10 ($\star$) On définit les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ pour $t \in]-1,1[$ par :

$$a_n = t^n, b_n = (-1)^n t^n \text{ et } c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$$

a) Montrer que les séries de termes générales a_n et b_n sont absolument convergentes. Que déduire de la série de termes générales c_n ?

b) Calculer c_n en fonction de n et t.

c) Calculer les sommes des séries et montrer que l'on a bien :

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Exercice 11 ($\star\star$) On considère les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$.

a) Montrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, c'est-à-dire la série de terme général $c_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l$, est divergent.

b) Montrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par elle-même est convergent. Commenter.

Exercice 12 ($\star$) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$. Déterminer la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes :

1. Si, pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et si u est décroissante et a pour limite 0, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si, pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et $\sum u_n$ un converge, alors la suite u est décroissante partir d'un certain rang.
3. Si, pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge, alors $\sum \sqrt{u_n}$ converge.
4. Si, pour tout $n > 0$, $u_n > 0$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge.
5. Si $\lim (-1)^n n u_n = 1$ alors $\sum u_n$ un converge.
6. Si $\lim (-1)^n n^2 u_n = 1$ alors $\sum u_n$ un converge.