TD 21 : Intégration

Exercice 1 ($\star$) Étudier les suites suivantes :

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{2+\cos(\frac{k\pi}{n})}\right)_{n>0}, \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n>0}, \quad \left(n^2\Big(\prod_{k=1}^{n} k^k\Big)^{-\frac{4}{n^2}}\right)_{n>0}.$$

Exercice 2 ($\star$) Pour tout $x>0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et qu'on a $|f(x)| \leq 1, \forall x \geq 0$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, prouver l'inégalité $\left|\int_{\pi/2}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \frac{2}{\pi}$.

c) Montrer que la fonction f admet une primitive bornée sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3 ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, admet un prolongement continue en 0.

Exercice 4 ($\star$) (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
En étudiant le discriminant du polynôme $P(X) = \int_a^b (f(t)+Xg(t))^2$ dt, montrer que :
$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2dt \int_a^b g(t)^2dt$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 5 ($\star$) On définit la fonction sur $\mathbb{R}$: $F(x) = \int_x^{x^2} \sin(t)dt$.
Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 6 ($\star$) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les suites suivantes tendent vers 0 :

$$I_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{t+n}, \quad J_n = \int_0^1 t^n f(t)dt \text{ et } K_n = \int_0^1 \frac{f(t)dt}{1+nt}.$$

Exercice 7 ($\star\star$) On considère la famille de fonction : $f_n(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^n(x^2+3x+2)}$.

a) Calculer $\int_0^1 f_1(t)dt$.

b) Soit g une fonction continue sur $[0,1]$.
Montrer que la suite donnée par : $u_n = \int_0^1 g(t)f_n(t)dt$, est bien définie et est bornée.

c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 2^{-n}$ admet une unique solution x_n dans $[0,1]$.

d) Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire que (x_n) est croissante.

e) Montrer que x_n est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 8 ($\star\star$) Pour tout entier non nul n, on pose : $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$

a) Etudier les variations de la suite (I_n) et calculer I_1.

b) Démontrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) En déduire que $0 \leq (n+1)I_n \leq e$.

d) Calculer les limites de (I_n) et (nI_n).

Exercice 9 ($\star$) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que :$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)^2dt$.
Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 10 ($\star$) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose g positive.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Exercice 11 ($\star$) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$\frac{x^4+1}{x^3-1}, \quad \frac{x^3-4x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}, \quad \frac{x^3+x^2}{x^3+x}, \quad \frac{1}{2x^2+x+1}.$$