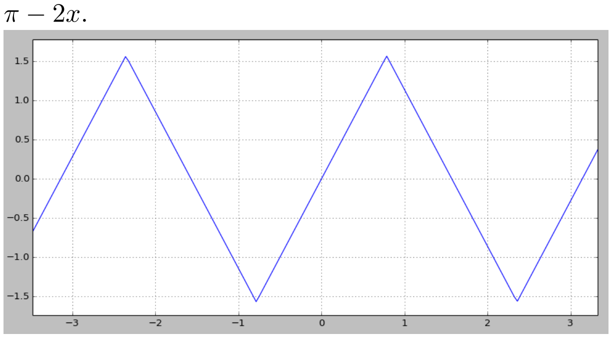
DM2 - Corrigé

Exercice 1 :

1. $y'(t) - 3y(t) = e^t + \sin(2t)$ avec $I = \mathbb{R}$.
   C'est une EDL1 à coefficient constant $\alpha = 3$ et avec second membre $e^t + \mathrm{Im}(e^{2it})$.
   Les solution homogènes sont $y_h(t) = \lambda e^{3t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $\boxed{\beta = 1}$ On résout $y_1' - 3y_1 = e^t$ avec $y_1(t) = ae^t$.
   On obtient $ae^t - 3ae^t = e^t \Leftrightarrow -2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}$.
   $\boxed{\beta = 2i}$ On résout $y_2' - 3y_2 = e^{2it}$ avec $y_2(t) = ae^t$.
   On obtient $2iae^{2it} - 3ae^{2it} = e^{2it} \Leftrightarrow (2i-3)a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2i-3} = \frac{-3-2i}{13}$.
   Les solutions sont $y(t) = y_h + y_1 + \mathrm{Im}(y_2) = \lambda e^{3t} - \frac{1}{2}e^t - \frac{2}{13}\cos(2t) - \frac{3}{13}\sin(2t)$.
2. $t(t+1)y'(t) - (t+2)y(t) = t$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$.
   C'est une EDL1 à coefficient non constant $a(t) = \frac{t+2}{t(t+1)}$ avec second membre $b(t) = \frac{1}{t+1}$ continue sur I.
   On a $a(t) = \frac{2}{t} + \frac{-1}{t+1}$ donc $A(t) = 2\ln t - \ln(t+1)$. Puis $y_h(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda \frac{t^2}{t+1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On recherche une solution particulière avec la méthode de Lagrange $y_p(t) = K(t)\frac{t^2}{t+1}$.
   On a $y_p'(t) = K'(t)\frac{t^2}{t+1} + K(t)\frac{2t}{t+1} - K(t)\frac{t^2}{(t+1)^2}$.
   Puis $t = t(t+1)y_p(t) - (t+2)y_p(t) = t^3K'(t) + 2t^2K(t) - K(t)\frac{t^3}{t+1} - K(t)\frac{(t+2)t^2}{t+1}$
   $= t^3K'(t)$ car les facteurs de $K(t)$ s'annulent bien.
   Donc $K'(t) = \frac{1}{t^2}$ puis $K(t) = \frac{-1}{t}$. Ainsi $y_p(t) = \frac{-t}{t+1}$.
   Conclusion $y(t) = \frac{\lambda t^2 - t}{t+1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. On a $\varphi(-x) = \mathrm{Arcsin}\left(\sin(-2x)\right) = \mathrm{Arcsin}\left(-\sin(2x)\right) = -\mathrm{Arcsin}\left(\sin(2x)\right)$. Donc la fonction est impaire.
   La périodicité est celle de $x \mapsto \sin(2x)$. φ est π-périodique.
   Puis comme composé de fonction continue $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ et $\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, φ est continue de $\mathbb{R}$ vers $[-\pi/2, \pi/2]$.
2. Les fonctions Arcsin et sin sont réciproques sur certains domaines.
   Donc pour $y \in [-\pi/2, \pi/2], \mathrm{Arcsin}\left(\sin(y)\right) = y$.
   Pour $x \in [0, \pi/4]$, on a $2x \in [0, \pi/2]$ donc $\mathrm{Arcsin}\left(\sin(2x)\right) = 2x$.
   Pour $x \in [\pi/4, \pi/2], \pi - 2x \in [0, \pi/2]$ donc $\mathrm{Arcsin}\left(\sin(2x)\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\sin(\pi - 2x)\right) = \pi - 2x$.
3. 

4. La fraction rationnelle $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas.
   Puis $1 + x^2 - 2|x| = (1 - [x|)^2 \geq 0$ donc $1 + x^2 \geq |2x|$ et ainsi $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$. Or Arcsin est continue sur $[-1,1]$ donc la composée est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, on calcul $f(\tan(\theta)) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\sin(2\theta)\right) = \varphi(\theta)$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $x = \mathrm{Arctan}\,(\theta)$ et donc $f(x) = \varphi(\mathrm{Arctan}\,(x))$.

6. On sait que φ est dérivable sur $]-\pi/4,\pi/4[+\pi\mathbb{Z}$ et Arctan : $\mathbb{R}\to]-\pi/2,\pi/2[$ est dérivable et prend des valeurs $-\pi/4$ et $\pi/4$ respectivement en -1 et en 1. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. De plus, on a :
$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\varphi'(\text{Arctan}\,(x))=\begin{cases}\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x\in]-1,1[\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{sinon}\end{cases}.$
7. On dispose de limite à droite et à gauche : $\lim_{1^+} f'=\lim_{(-1)^-} f'=-1$ et $\lim_{1^-} f'=\lim_{(-1)^+} f'=1$. Donc f est dérivable à droite et à gacuhe en -1 et en 1 mais n'est pas dérivable car admet des nombres dérivés différents.
8. On dispose des équations de tangentes :
En $0, y=f(0)+f'(0)x=2x$.
En $\sqrt{3}, y=\pi/3-\frac{1}{2}(x-\sqrt{3})$.
En $1/\sqrt{3}, y=\pi/3+\frac{3}{2}(x-1/\sqrt{3})$.
En $-\sqrt{3}, y=-\pi/3-\frac{1}{2}(x+\sqrt{3})$.
En $-1/\sqrt{3}, y=-\pi/3+\frac{3}{2}(x+1/\sqrt{3})$.