DM3 - corrigé

Exercice 1 : a) Pour $x \in [0, \pi/4], \tan(\pi/4 - x) = \frac{\tan(\pi/4)+\tan(-x)}{1-\tan(\pi/4)\tan(-x)} = \frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}$.
Car $\tan(\pi/4) = 1$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

b) On pose $u = \pi/4 - x$ et $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Donc $I = \int_{\pi/4}^{0} \ln(1 + \tan(\pi/4 - u)(-\mathrm{d}u)$
$= \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(\pi/4 - u))\,\mathrm{d}u$
$= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right) \mathrm{d}u$ d'après a.
$= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right) \mathrm{d}u$
$= \int_0^{\pi/4} \ln(2)\,\mathrm{d}u - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan u)\,\mathrm{d}u$ par linéarité
$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$.
Donc $I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$ montre que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

c) On a $I = \int_0^{\pi/4} 1 \times \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x$
$= [x\ln(1 + \tan(x))]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$
$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - 0 - \int_0^{\pi/4} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos x(\cos x+\sin x)}$.
On en déduit que $\int_0^{\pi/4} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos x(\cos x+\sin x)} = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice 2 : a) On peut démontrer par récurrence que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation $n = 1$ est donné par l'énoncé
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose f de classe C^n On peut écrire $f' = f \circ h$ avec $h(x) = \frac{1}{x}$ de classe C^∞. Donc f' est de classe C^n puis f est de classe C^{n+1}.
On peut dériver l'équation, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}f'(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2}f(x)$. En effet, en remplaçant x par $1/x$ dans l'énoncé, on obtient $f'(1/x) = f(\frac{1}{1/x}) = f(x)$. On a bien établit que $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

b) Pour $x > 0$, on note $t = \ln x \in \mathbb{R}$. Puis $g(t) = f(e^t)$ est de classe C^∞ par opération.
On a $g'(t) = e^t f'(e^t) = xf'(x)$ et $g''(t) = e^{2t} f''(e^t) + e^t f'(e^t) = x^2 f''(x) + xf'(x)$.
On en déduit que $x^2 f''(x) + f(x) = g''(t) - g'(t) + g(t)$. Donc g est solution d'une EDL2 à coefficients constants.

c) Le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1$ et admet pour racine $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Notons $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi $g(t) = ae^{t/2}\cos(\omega t) + e^{t/2}\sin(\omega t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Donc $f(x) = g(\ln x) = \sqrt{x}\,(a\cos(\omega \ln x) + b\sin(\omega \ln x))$.

d) On réalise la synthèse. On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(a\cos(\omega \ln x) + b\sin(\omega \ln x)) + \sqrt{x}\left(-\frac{a\omega}{x}\sin(\omega \ln x) + \frac{b\omega}{x}\cos(\omega \ln x)\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{x}}\,((a/2 + b\omega)\cos(\omega \ln x) + (b/2 - a\omega)\sin(\omega \ln x))$.
Et $f(1/x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,(a\cos(\omega \ln x) - b\sin(\omega \ln x))$.
Donc on obtient le système $\begin{cases} a/2 + b\omega & = a \\ b/2 - a\omega & = -b \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a = \sqrt{3}b$.
Ainsi $f(x) = A\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega \ln x) + \frac{1}{2}\sin(\omega \ln x)\right)$
$= A\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right)$ pour $A \in \mathbb{R}$ quelconque.