

DM3 : Primitive et EDL
à rendre le mardi 19 novembre 2024.

Exercice 1 : On recherche à calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

- a) Montrer que, pour $x \in [0, \pi/4]$, $\tan(\pi/4 - x) = \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)}$.
- b) Avec le changement de variable $u = \pi/4 - x$, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2) du - I$.
En déduire la valeur de I .
- c) A l'aide d'une intégration par partie, déterminer la valeur de $\int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos x(\cos x + \sin x)}$.

Exercice 2 : On recherche les fonctions f de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* telle que :

$$\text{pour tout } x > 0, f'(x) = f(1/x)$$

- a) Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* puis que $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.
- b) En réalisant le changement de variables $x = e^t$ et $f(x) = g(t)$, montrer que g est solution d'une EDL2 à coefficients constants.
- c) En déduire qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \sqrt{x} \left(a \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + b \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$.
- d) En déduire les solutions du problème initial.