Devoir Surveillé de Mathématiques n° 4
le samedi 23 Novembre 2024 - durée 3h

Exercice 1 : a) On a $y'(t) = \frac{2t+1}{t(t+1)}y(t) + \frac{t}{t+1}$ pour $t > 0$.

C'est une équation différentielle linéaire à coefficient non constant $a(t) = \frac{2t+1}{t(t+1)}$ avec second membre $b(t) = \frac{t}{t+1}$.

Une primitive de $a(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}$ est $A(t) = \ln t + \ln(t+1)$ pour $t > 0$.

Donc $y_h(t) = \exp A(t) = t(t+1) = t^2 + t$ est une solution homogène génératrice.

On recherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = (t^2+t)K(t)$ à l'aide de la méthode de Lagrange.

On a $(t^2+t)K'(t) + (2t+1)K(t) = (2t+1)K(t) + \frac{t}{t+1}$.

Donc $K'(t) = \frac{t}{(t+1)(t^2+t)} = \frac{1}{(t+1)^2}$ et $K(t) = -\frac{1}{t+1}$.

Ainsi $y_p(t) = t(t+1)K(t) = -t$ et les solutions sont de la forme $y(t) = \lambda(t^2+t) - t$.

Puis $y(1) = 2$ donne la condition $2\lambda - 1 = 2$ d'où $\lambda = 3/2$.

Ainsi $y(t) = 3/2(t^2+t) - t = \frac{3t^2-t}{2}$.

b) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre $b(t) = t\cos(t) = \mathrm{Re}(te^{it})$.

Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1^2$. Les racines sont $1+i$ et $1-i$.

On pose $y_1(t) = e^t \cos t$ et $y_2(t) = e^t \sin t$ les solutions homogènes génératrices.

On recherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = (at+b)e^{it}$ avec pour second membre te^{it}.

Donc $y_p'(t) = (iat + ib + a)e^{it}$

puis $y_p''(t) = (-at - b + 2ia)e^{it}$.

Puis $te^{it} = [(-at-b+2ia) - 2(iat+ib+a) + 2(at+b)]e^{it} = [a(1-2i)t + a(-2+2i) + b(1-2i)]e^{it}$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a(1-2i) & = 1 \\ a(-2+2i) + b(1-2i) & = 0 \end{cases}.$$

Donc $a = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$

et $b = \frac{(2-2i)a}{1-2i} = \frac{2(1-i)(1+2i)^2}{25} = \frac{2+14i}{25}$.

Donc $\mathrm{Re}(y_p(t)) = (t/5 + 2/25)\cos t - (2t/5 + 14/25)\sin t$.

Ainsi $y(t) = e^t(A\cos t + B\sin t) + (t/5 + 2/25)\cos t - (2t/5 + 14/25)\sin t$.

Et $y'(t) = e^t((A+B)\cos t + (B-A)\sin t) + (2t/5 - 9/25)\cos t - (t/5 + 12/25)\sin t$.

Les conditions initiales sont $\begin{cases} A + 2/25 & = 1 \\ A + B - 9/25 & = 0 \end{cases}$.

Donc $A = 23/25$ et $B = -14/25$.

Exercice 2 : a) C'est une suite arithmético-géométrique. On recherche le point fixe $l \in \mathbb{R}$ tel que $3l = 7 - 2l$. Donc $l = 7/5$. Puis $u_n - l = (-2/3)^n(u_0 - l)$ est une suite géométrique de raison $-2/3$. Ainsi $u_n = (-12/5)(-2/3)^n + 7/5 \to 7/5$ car $|-2/3| < 1$.

b) C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son polynôme caractéristique est $X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{1}{3} = (X-1)(X+\frac{1}{3})$.

Donc $v_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2(-1/3)^n$.

Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2/3 & = -1 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = (-1/2)$ et $\lambda_2 = (3/2)$.
Puis $(-1/3)^n \to 0$ donc $v_n \to \lambda_1 = \frac{-1}{2}$

c) C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Son polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1/2 = (X - 1/2)^2 + (1/2)^2$.
Donc les racines sont $q = 1/2 \pm 1/2i = \sqrt{2}2e^{\pm i\pi/4}$.
La suite s'écrit $w_n = (\sqrt{2}/2)^n(A\cos(n\pi/4) + B\sin(n\pi/4))$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ à déterminer.
Les conditions initiales donnent $\begin{cases} A & = w_0 = 1 \\ A/2 + B/2 & = w_1 = 2 \end{cases}$ donc $A = 1$ et $B = 3$.
Puis $w_n = (\sqrt{2}/2)^n(\cos(n\pi/4) + 3\sin(n\pi/4)) \to 0$
car $(\sqrt{2}/2)^n \to 0$ et $\cos(n\pi/4) + 3\sin(n\pi/4)| \leq 4$ est bornée.

Problème I : 1. Pour $x = y = 0$. On obtient $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$.
Si $f(0) = 0$ alors pour tout $x > 0, f(\sqrt{x^2}) = f(x)f(0) = 0$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $x < 0$, $f(x)^2 = f(\sqrt{x^2 + x^2}) = 0$ car $\sqrt{x^2 + x^2} > 0$. Donc f est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
Ainsi f est la fonction nulle Absurde. Donc $f(0) = 1$.
Enfin pour $x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(-x)f(0) = f(\sqrt{(-x)^2 + 0^2} = f(x)f(0) = f(x)$. Donc f est paire.

2. La fonction f est paire donc f' est impaire.
En effet en dérivant $f(-x) = f(x)$ on trouve $-f'(x) = f'(x)$.
En particulier $f'(0) = 0$ car $f'(0) = -f'(0)$.
Puis par définition $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x}$.

3. On peut dériver l'équation fonctionnelle par rapport à x.
On obtient $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}) = f'(x)f(y)$
On en déduit $\frac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f'(x)}{x} f(y)$. Puis pour $x \to 0$ et $y > 0$.
On obtient $\frac{f'(\sqrt{y^2})}{\sqrt{y^2}} = \sigma f(y)$ c'est à dire $f'(y) = \sigma y f(y)$ car $\sqrt{y^2} = |y| = y$.

4. On résout l'EDL1. Une primitive de $a(t) = \sigma t$ est $A(t) = \sigma \frac{t^2}{2}$.
Puis $f(t) = \lambda \exp(\sigma t^2/2)$. Or $f(0) = 1$ donc $\lambda = 1$.
On fait ensuite la synthèse avec $f(t) = e^{\sigma t^2/2}$.
On a f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$ sans condition sur σ.

Problème II : 1) On a u de classe C^1 par opérations puis $u'(t) = 2x'(t) + y'(t)$
$= 2(3x(t) + y(t) + e^t) + (2x(t) + 2y(t) + t^2)$
$= 8x(t) + 4y(t) + 2e^t + t^2$
$= 4u(t) + 2e^t + t^2$.
De plus $u(0) = 2x(0) + y(0) = -1/32$

2) On résout le problème de Cauchy d'ordre 1 définie dans la question précédente.
Une solution homogène génératrice est $u_h(t) = e^{4t}$.
On recherche $u_p(t) = K(t)e^{4t}$
et $u_p'(t) = K'(t)e^{4t} + 4K(t)e^{4t}$.
Donc $K'(t)e^{4t} + 4K(t)e^{4t} = 4K(t)e^{4t} + 2e^t + t^2$
Puis $K'(t) = 2e^{-3t} + t^2e^{-4t}$ à l'aide d'une IPP on trouve :
$K(t) = \frac{-2}{3}e^{-3t} - (t^2/4 + t/8 + 1/32)e^{-4t}$.
Donc $u_p(t) = \frac{-2}{3}e^t - (t^2/4 + t/8 + 1/32)$.
Puis $u(t) = \lambda u_h(t) + u_p(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.
Donc $-1/32 = \lambda + (-2/3) - (1/32)$ donc $\lambda = 2/3$

3) On a $v'(t) = x'(t) - y'(t)$
$= 3x(t) + y(t) + e^t - 2x(t) - 2y(t) - t^2$
$= x(t) - y(t) + e^t - t^2 = v(t) + e^t - t^2$
avec $v(0) = x(0) - y(0) = 2$.

4) On a $v_h(t) = e^t$ solution homogène génératrice.
On a $v_p(t) = K(t)e^t$ et $v_p'(t) = K'(t)e^t + K(t)e^t$.
Puis $K'(t) = e^{-t}(e^t - t^2) = 1 - t^2 e^{-t}$.
Ainsi avec une IPP, on trouve :
$K(t) = t + e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$.
Donc $v(t) = \mu v_h(t) + v_p(t) = \mu e^t + te^t + (t^2 + 2t + 2)$
Et on a $2 = v(0) = \mu + 2$ donc $\mu = 0$.

5) On a $\begin{cases} u & = 2x + y \\ v & = x - y \end{cases}$ ssi $\begin{cases} u + v & = 3x \\ u - 2v & = 3y \end{cases}$.
Donc $x(t) = \frac{u(t)+v(t)}{3}$
$= (2/9)e^{4t} + (t/3 - 2/9)e^t + (t^2/4 + 5t/8 + 21/32)$.
Et $y(t) = \frac{u(t)-2v(t)}{3}$
$= (2/9)e^{4t} - (2t/3 + 2/9)e^t - (3t^2/4 + 11t/8 + 43/32)$.

1) On a $x'(t) = 3x(t) + y(t) + e^t$ donc est dérivable par opération.
Et $x''(t) = 3x'(t) + y'(t) + e^t = 3x'(t) + 2x(t) + 2y(t) + t^2 + e^t$
Or $y(t) = x'(t) - 3x(t) - e^t$ d'après la première équation du système.
Donc $x''(t) = 3x'(t) + 2x(t) + 2(x'(t) - 3x(t) - e^t) + t^2 + e^t$
$= 5x'(t) - 4x(t) - e^t + t^2$.
Donc $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = -e^t + t^2$ et
$x'(0) = 3x(0) + y(0) + e^0 = 63/32 - 43/32 + 1 = 13/8$.

2) On résout le problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 défini par la question précédente.
Le polynôme caractéristique est $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$. On pose $x_1(t) = e^t$ et $x_2(t) = e^{4t}$.
On recherche $x_{p1}(t) = ate^t$ lorsque que $b_1(t) = -e^t$.
On trouve $x_{p1}'(t) = a(t+1)e^t$
et $x_{p1}''(t) = a(t+2)e^t$
puis $-e^t = [a(t+2) - 5a(t+1) + 4at]e^t$.
Donc $-3a = -1$ puis $a = 1/3$.
On recherche $x_{p2}(t) = at^2 + b + c$ un polynôme du second degré.
On trouve $2a - 5(2at + b) + 4(at^2 + bt + c) = t^2$
ssi $\begin{cases} 4a & = 1 \\ 4b - 10a & = 0 \\ 2a - 5b + 4c & = 0 \end{cases}$
Donc $a = 1/4$, $b = 5a/2 = 5/8$ et $c = (5b - 2a)/4 = 21/32$.
Ainsi $x(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{4t} + t/3e^t + (t^2/4 + 5t/8 + 21/32)$.
On en déduit $x'(t) = \lambda_1 e^t + 4\lambda_2 e^{4t} + (t+1)/3e^t + (t/2 + 5/8)$.
Les conditions $x(0) = 21/32$ et $x'(0) = 13/8$ donnent
$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 21/32 & = 21/32 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 1/3 + 5/8 & = 13/8 \end{cases}$
Donc $\lambda_1 = -2/9$ et $\lambda_2 = 2/9$.
Ainsi $x(t) = (t/3 - 2/9)e^t + 2/9e^{4t} + t^2/4 + 5t/8 + 21/32$.

3) On a $y''(t) = 2x'(t) + 2y'(t) + 2t = 2(3x(t) + y(t) + e^t) + 2y'(t) + 2t$
$= 3(y'(t) - 2y(t) - t^2) + 2y(t) + 2y'(t) + 2e^t + 2t$
$= 5y'(t) - 4y(t) + 2e^t - 3t^2 + 2t$.
Et $y'(0) = 2x(0) + 2y(0) + 0 = -11/8$.

4) En résolvant le problème de Cauchy linéaire d'ordre 2.
On trouve $y(t) = \mu_1 e^t + \mu_2 e^{4t} + y_{p1}(t) + y_{p2}(t)$
avec $y_{p1}(t) = -2t/3e^t$ et $y_{p2}(t) = -(3t^2/4 + 11t/8 + 43/32)$.
Les conditions initiales donnent $\mu_1 = -\mu_2 = -2/9$.
Donc on a :$y(t) = (2/9)e^{4t} - (2t/3 + 2/9)e^t - (3t^2/4 + 11t/8 + 43/32)$.

Problème III : 1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On a $f(l) = l \Leftrightarrow l^3 - l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l = 0$ ou $l^2 - l - 1 = 0$.
Donc $l \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
On note $l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $l_2 = 0$ et $l_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$.
Donc f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[\frac{2}{3}, +\infty[$. Elle est décroissante sur $[0, \frac{2}{3}]$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = x^3 - x^2 - x = (x - l_1)(x - l_2)(x - l_3)$.
Donc g est positive sur $[l_1, l_2]$ et $[l_3, +\infty]$. Et g est négative sur $]-\infty, l_1]$ et $[l_2, l_3]$.

3. On a $u_0 \in]-\infty, l_1[$ et f croissante sur cet intervalle donc $f(]-\infty, l_1[) =]\lim_{-\infty} f, f(l_1)[=]-\infty, l_1[$. Donc l'intervalle est stable et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < l_1$.
Puis pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ d'après l'étude du signe de g. Donc la suite est décroissante.
D'après le Théorème de convergence monotone elle admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si la limite est finie alors c'est un point fixe vérifiant $l \leq u_0 < l_1 < l_2 < l_3$ ce qui est absurde. Donc $l = -\infty$ et $u_n \to -\infty$.

4. On a $u_0 \in]l_3, +\infty[$ et f croissante sur cet intervalle donc $f(]l_3, +\infty[) =]f(l_3), \lim_{+\infty} f[=]l_3, +\infty[$. Donc l'intervalle est stable et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > l_3$.
Puis pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$ d'après l'étude du signe de g. Donc la suite est croissante.
D'après le Théorème de convergence monotone elle admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si la limite est finie alors c'est un point fixe vérifiant $l \geq u_0 > l_3 > l_2 > l_1$ ce qui est absurde. Donc $l = +\infty$ et $u_n \to +\infty$.

5. On a $]l_1, l_2[=]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0[$. La fonction f est croissante et g est positive sur cet intervalle. Ainsi $f(]l_1, l_2[) =]f(l_1), f(l_2)[=]l_1, l_2[$ et l'intervalle est stable. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, l_1 < u_n < l_2$.
Puis $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$. Donc la suite est croissante.
Donc d'après le théorème de convergence monotone $u_n \to l \in [l_1, l_2]$. Or $l_1 < u_0 \leq l$ car la suite est croissante. Donc $l = l_2 = 0$.

6. On a $l_2 < \frac{2}{3} < l_3$ donc la fonction f n'est pas monotone sur l'intervalle.
On a $f(]l_2, \frac{2}{3}[) =]f(2/3), f(l_2)[=]-4/27, l_2[\subset]l_1, l_2]$ car la fonction est alors décroissante.
Et la fonction est croissante lorsque $x > 2/3$
donc $f(]\frac{2}{3}, l_3[) \subset]f(2/3), f(l_3)[=]-4/27, l_3[=]-4/27, 0] \cup]0, l_3[\subset]l_1, 0] \cup]0, l_3]$.
Donc on peut seulement en déduire que $]l_1, l_3[$ est stable par f :
$f(]l_1, l_3[) \subset]l_1, l_3[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]l_1, l_3[$.
Supposons par l'absurde qu'il n'existe aucun rang N tel que $u_N \in]l_1, l_2]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \notin]l_1, l_2]$, donc $u_n \in]l_1, l_3[\setminus]l_1, l_2] =]l_2, l_3[$. Puis $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ donc u_n décroit vers sa limite $l_2 = 0$. Ainsi il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0, u_n \in [-2/3, 2/3]$ (définition avec $\varepsilon = 2/3$) Mais $u_{N_0+1} = f(u_{N_0}) \in f(]l_2, l_3[\cap [-2/3, 2/3]) = f(]0, 2/3]) = [-4/27, 0[$. Ainsi $u_{N_0+1} \in]l_1, l_2]$ Absurde.
Puis si $u_N = 0$ alors $f(0) = 0$ et la suite stationne en 0. Si $u_N \in]l_1, l_2[$ alors la question

précédente montre que la suite $(u_n)_{n\geq N}$ tend vers 0. Donc la suite tend bien vers 0 car la convergence ne dépend pas des premiers termes.