Devoir Surveillé de Mathématiques n° 4
le samedi 23 Novembre 2024 - durée 3h

Exercice 1 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivant :

a) $t(1+t)y'(t) - (2t+1)y(t) = t^2$ pour $t \in]0, +\infty[$ et $y(1) = 2$.
b) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = t\cos(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 2 : Etudier les suites récurrentes suivantes et déterminer les limites si elles existent.

a) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = -1$ et $3u_{n+1} = 7 - 2u_n$.
b) $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 1, v_1 = -1$ et $v_{n+2} = \frac{2v_{n+1}+v_n}{3}$.
c) $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par $w_0 = 1, w_1 = 2$ et $2w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n$.

Problème I : On recherche les fonctions f non nulle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(0) = 1$ puis que f est une fonction paire.
2. On note $\sigma = f''(0) \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \sigma$.
3. En déduire que $f'(t) = \sigma f(t)$ pour tout $t > 0$.
4. En déduire les solutions de l'équation fonctionnelle.

Problème II : Soit $t \in \mathbb{R}$. On recherche à résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t) + t^2 \end{cases}$

associé aux conditions initiales $x(0) = 21/32$ et $y(0) = -43/32$.

On propose deux méthodes **indépendantes** de résolution.

Méthode 1 : Changements d'inconnues.

On pose $u(t) = 2x(t) + y(t)$ et $v(t) = x(t) - y(t)$.

1) Montrer que $u'(t) = 4u(t) + 2e^t + t^2$ et calculer $u(0)$.
2) En déduire la valeur de $u(t)$.
3) Montrer que v est solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1.
4) En déduire la valeur de $v(t)$.
5) En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. (sans utiliser le résultat de la méthode 2)

Méthode 2 : Elévation de l'ordre de l'équation.

1) Montrer que $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = -e^t + t^2$ et calculer $x'(0)$.
2) En déduire la valeur de $x(t)$. (sans utiliser le résultat de la méthode 1)
3) Montrer que $y(t)$ est solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2.
4) En déduire la valeur $y(t)$. (sans utiliser le résultat de la méthode 1)

Problème III : On considère la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$ et la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet trois points fixes $l_1 < l_2 < l_3$ dont on précisera les valeurs.
2. Etudier les variations de f et le signe de $g(x) = f(x) - x$.
3. On suppose que $u_0 < l_1$. Montrer que $\lim_{+\infty} u_n = -\infty$.
4. On suppose que $u_0 > l_3$. Montrer que $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$.
5. On suppose que $u_0 \in]l_1, l_2[$. Montrer que $\lim_{+\infty} u_n = 0$.
6. On suppose que $u_0 \in]l_2, l_3[$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in]l_1, l_2]$.
   En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite.