DM4 : Suites et continuité
à rendre le jeudi 12 décembre 2024.

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
2. Etudier la monotonie des suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

3. Montrer que u_n et v_n vers une limite commune.
4. En déduire la limite de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
5. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \ln(p).$$

Exercice 2 : On recherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. On pose $b = f(0)$. Montrer que $g(x) = f(x) - b$ vérifie la même équation fonctionnelle.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$ puis que $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $g(nx) = ng(x)$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}, g(rx) = rg(x)$.
5. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$.
7. En déduire les solutions f du problème initial.