Semaine 11 - Du 9 au 13 Décembre 2024

Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

Révision de la semaine 10

Limite à droite et à gauche

Définition avec les voisinages partielles. L'égalité équivaut à l'existence d'une limite simple.
Théorème de la limite monotone.

Continuité en un point $a \in \mathbb{R}$

Définition par la limite finie. Continuité à droite et à gauche.
Prolongement par continuité et par continuité à droite ou à gauche.
Limite de $f(u_n)$ avec $u_n \to a$ et f continue en a.

Opérations sur la continuité

Sommes, produits, combinaisons linéaires de fonctions continue en un point.
Quotient de fonctions continue en un point avec dénominateur non nul en a.
Composition de f continue en a et g continue en $f(a)$.

Continuité sur un segment

Théorème des valeurs intermédiaires.
Application à la recherche de zéro par dichotomie (en Python).
Image d'un intervalle par une fonction continue.
Théorème des bornes atteintes d'une fonction continue sur un segment. (dém. hors programme)
Théorème de la bijection continue

Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes

Définition de limite en un point de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ vers un complexe $l \in \mathbb{C}$ via le module.
Notion de voisinage de $l \in \mathbb{C}$ comme la famille des disques ouverts $D_R(l)$, pour $R > 0$.
Continuité en un point de $\mathbb{R}$ et sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Equivalence de la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ avec les fonctions $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ pour l'existence d'une limite, la continuité en un point et la continuité sur un intervalle.
Si f admet une limite en un point alors f est bornée sur un voisinage.

Liste de Questions de cours :

a) Etudier la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $u_0 = 1$.
b) Enoncer et démontrer le résultat de composée des limites.
c) Enoncer puis démontrer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
d) Trouver les fonctions f continue en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
e) Enoncer puis démonter le Théorème des Valeurs Intermédiaires sur un segment $[a, b]$.
f) Equivalence de l'existence de la limite de $f : I \to \mathbb{C}$ et de celles des limites de $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$.