DS5 de math - Corrigé

Partie 1 : QCM type ENAC-P - durée 1h

Fonctions de référence

Question 1 : On calcul les limites de $f(x) = \frac{x^3-2x}{(x^2+2)(x-1)}$.

En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{x^3}{x^3} = 1$.

En 0^+, $f(x) \to f(0) = 0$.

En 1^+, $f(x) \sim \frac{-1}{3(x-1)} \to -\infty$.

Donc seul la réponse A est bonne.

Question 2 : On a $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^3-x^2+2x-2}$.

Donc $f'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^3-x^2+2x-2)-(x^3-2x)(3x^2-2x+2)}{(x^3-x^2+2x-2)^2}$

$= \frac{-x^4+8x^3-8x^2+4}{(x^2+2)^2(x-1)^2}$ (en factorisant le dénominateur).

La réponse A est fausse et la D est correcte.

Pour vérifier B et C, on calcul $3f'(x) - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x^2+2} = \frac{3(-x^4+8x^3-8x^2+4)-(x^2+2)^2+4(x-1)^2(x^2+2)}{(x^2+2)^2(x-1)^2}$

$= \frac{16x^3-16x^2-16x+16}{(x^2+2)^2(x-1)^2} = \frac{16(x-1)^2(x+1)}{(x^2+2)^2(x-1)^2} = \frac{16(x+1)}{(x^2+2)^2}$.

La réponse B est également correcte.

Question 3 : La division euclidienne de $x^3 - 2x$ par $x^3 - x^2 + 2x - 2$ est $x^3 - 2x = 1(x^3 - x^2 + 2x - 2) + (x^2 - 4x + 2)$. Donc les réponses A et C sont fausses.

Puis $\frac{x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2}$. En résolvant on obtient $a = -\frac{1}{3}$, $b = +\frac{4}{3}$ et $c = -\frac{8}{3}$.

Donc $f(x) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{4x-8}{x^2+2}\right)$ (pb de signe avec B)

Aucune réponse n'est correcte.

Equation différentielle

Question 4 : On pose $a(x) = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{-2x}{x^2-1}$ continue sur V.

Une primitive est $A(x) = -\ln|x^2 - 1|$ donc $y_h(x) = \lambda e^{A(x)} = \frac{\lambda}{x^2-1}$.

La seule réponse est C.

Question 5 : On peut utiliser la méthode de Lagrange avec $y_p(x) = K(x)y_h(x)$. On obtient $K'(x) = x^2$ puis $K(x) = \frac{x^3}{3}$.

La seule réponse est C.

Question 6 : On a $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Puis $y(2) = \frac{C}{-3} + \frac{8}{-9} = -1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}$

La seule réponse est B.

Suite récurrence linéaire

Question 7 : La SRL2 admet $q_1 = 1/2$ et $q_2 = 2$ comme raison géométrique. Donc son polynôme caractéristique est $(X - 1/2)(X - 2) = X^2 - (5/2)X + 1$.

Ainsi $a_{n+2} - \frac{5}{2}a_{n+1} + a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En multipliant par 2, on trouve la réponse B.

Question 8 : Le polynôme caractéristique est $X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{5}{3} = (X - 1)(X + \frac{5}{3})$.

Donc la bonne réponse est C

Question 9 : On écrit $u_n = \lambda_1(-5/3)^n + \lambda_2$ avec $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 1 \\ \frac{-5}{3}\lambda_1 + \lambda_2 & = \frac{13}{3} \end{cases}$. On trouve $\lambda_1 = \frac{-5}{4}$ et $\lambda_2 = \frac{9}{4}$.

La bonne réponse est B

Continuité et Dérivabilité

Question 10 : La fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
On a $e^x =_{x\to 0} 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ donc $f(x) =_{x\to 0} \frac{x}{2} + o(x)$ Ainsi f est dérivable en 0 avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.
Les réponses A et D sont bonnes.

Question 11 : On a $f(x) = (x+1)e^{-1/x} \sim_{+\infty} xe^0 = x$.
La bonne réponse est B

Question 12 : On a $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1 + x^2 + o(x^2)) = \frac{x^2+o(x^2)}{x} = x + o(x)$.
Donc f est dérivable en 0 avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
On a $f(\pi/2) = \frac{2\ln 2}{\pi}$ et $f(\pi/2 + \pi) = \frac{2\ln 2}{3\pi}$ donc f n'est pas périodique.
On a $\ln(1) \leq \ln(1 + \sin^2(x)) \leq \ln(2)$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}$. Ainsi $f(x) \to_{+\infty} 0$.
La seule bonne réponse est A

Partie 2 : Problèmes à rédiger - durée 1h

Problème I :

1. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ et $b_n > 0$.
Init. $n = 0$ On a $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = 2 > 0$.
Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n > 0$ et $b_n > 0$. Alors $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} > 0$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} > 0$.
2. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.
Init. $n = 0$ On a $a_n = 1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et $b_0 = 2 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$. Donc $a_n = A/B$ et $b_n = C/D$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{N}^*$. Puis $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{2AC}{AD+CB} \in \mathbb{Q}$ et $b_n = \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{AD+CB}{2BD} \in \mathbb{Q}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\frac{a_n+b_n}{2} = a_nb_n$. Donc la suite produit a_nb_n est constante.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{(a_n+b_n)^2-4a_nb_n}{2(a_n+b_n)} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)} > 0$.
5. On a $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} - a_n = \frac{a_n}{a_n+b_n}(2b_n - (a_n + b_n)) = \frac{a_n}{a_n+b_n}(b_n - a_n) > 0$. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
On a $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+b_n}{2} - b_n = \frac{a_n-b_n}{2} < 0$. Donc la suite est décroissante.
D'après le thm de limite monotone, on a $a_n \to l_a$ et $b_n \to l_b$. Puis dans la relation $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, on obtient $l_b = \frac{l_a+l_b}{2}$ donc $l_a = l_b$.
De plus $2 = u_0v_0 = u_nv_n \to l_al_b = (l_a)^2$. Donc $l_a = \sqrt{2}$ car les suites sont positives.
Ainsi $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont des suites de rationnelles qui tendent vers $\sqrt{2}$ un irrationnel.

Problème II :

1. (a) La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2 \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$. Donc f est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$. On peut remarquer que la fonction est impaire et que les limites en $\pm\infty$ sont nulle pour faire le tracé.
   (b) On a $g(x) = \frac{x}{1+x^2} - x = \frac{-x^3}{1+x^2}$. Donc $g(x)$ est négative sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_-$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \varphi(u_{n+1}) = \varphi(f(u_n)) = \varphi\left(\frac{u_n}{1+u_n^2}\right) = \varphi(u_n) = v_n$. Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est constante.
   (b) On a $u_1 = f(u_0) \in f(\mathbb{R})$. Or d'après les variations de f, elle atteint un maximum en 1 et un minimum en -1. Donc $f(\mathbb{R}) = [f(-1), f(1)] = [-1/2, 1/2]$. Ce donne bien $u_1 \in [-1/2, 1/2]$.
   (c) Si $u_1 \geq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0, 1]$ car l'intervalle est stable. Puis $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante. Puis $u_n \to l$ un point fixe d'après le théorème de la limite monotone. Or $f(l) = l$ ssi $l = 0$. Donc $u_n \to 0$.
   Si $u_1 < 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [-1, 0]$ l'intervalle stable. La suite est désormais croissante et tend également vers 0.

3. On en déduit que $v_n = f(u_n) \to f(0)$ par continuité de f. Or $v_n = f(x) \to f(x)$ car la suite est constante. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$ donc la fonction est constante.

   La synthèse montre bien que toute fonction $f(t) = c$ constante est solution du problème.

Problème III : 1. Soit $x \neq 0$. On a $f(-x) = \frac{\text{ch}\,(-x)-1}{-x} = -\frac{\text{ch}\,(x)-1}{x} = -f(x)$.

   Puis $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}-2}{2x} \sim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \to_{x\to+\infty} +\infty$.

   Comme f est impaire, on en déduit que $f(x) \to_{x\to-\infty} -\infty$.

2. Soit $x > 0$ et $t \in]0, x[$. On a $\text{th}\,'(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)} < 1 < \text{sh}\,'(t) = \text{ch}\,(t)$.

   Donc en intégrant entre 0 et x, on obtient $\int_0^x \text{th}\,'(t)\,\text{d}t < \int_0^x \text{d}t < \int_0^x \text{sh}\,'(t)\,\text{d}t$. C'est à dire l'inégalité $\text{th}\,(x) < x < \text{sh}\,(x)$ car $\text{th}\,(0) = \text{sh}\,(0) = 0$.

   Puis $\frac{\text{th}\,x}{\text{sh}\,x} < \frac{x}{\text{sh}\,x} < 1$ avec $\frac{\text{th}\,x}{\text{sh}\,x} = \frac{1}{\text{ch}\,x} \to_{x\to0} 1$.

   Donc par théorème d'encadrement $\frac{x}{\text{sh}\,x} \to_0 1$ c'est à dire $\text{sh}\,x \sim_0 x$ i.e. $\text{sh}\,x =_{x\to0} x + o(x)$.

3. On a $f(x) = \frac{\text{ch}\,(x)-\text{ch}\,(0)}{x-0} \to \text{ch}\,'(0) = \text{sh}\,(0) = 0$.

   Donc f se prolonge par continuité avec $f(0) = 0$.

4. Le calcul donne $f'(x) = \frac{x\text{sh}\,(x)-\text{ch}\,(x)+1}{x^2}$. On étudie le numérateur $g(x) = x\text{sh}\,(x) - \text{ch}\,(x) + 1$ avec $g'(x) = x\text{ch}\,(x)$ qui change de signe en 0. Donc g atteint un minimum en 0 qui vaut $g(0) = 0$. Puis $g > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. On utilise l'identité $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$. On a $\text{ch}\,(x) - 1 = \frac{\text{ch}^2(x)-1}{\text{ch}\,(x)+1} = \frac{\text{sh}^2(x)}{1+\text{ch}\,(x)}$.

   Puis $\text{ch}\,(x) =_{x\to0} 1 + \frac{(x+o(x)^2)}{1+1+o(x)} =_{x\to0} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

6. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\text{ch}\,(x)-1}{x^2} \sim_{x\to0} \frac{x^2/2}{x^2} \to_{x\to0} \frac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$.