Devoir Surveillé de Mathématiques n° 5
le samedi 14 Décembre 2024 - durée 2h30

Partie 1 : QCM type ENAC-P - durée 1h

Fonctions de référence

Question 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-2x}{(x^2+2)(x-1)}$.

A) $\lim_{+\infty} f = 1$.
B) $\lim_{+\infty} f = +\infty$
C) $\lim_{0^+} f = 1$
D) $\lim_{1^+} f = +\infty$

Question 2 : La dérivée de f est :

A) $f'(x) = \frac{3x^2-2}{3x^2-2x+2}$
B) $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x^2+2} + \frac{16(x+1)}{(x^2+2)^2}\right)$
C) $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x^2+2} - \frac{8x^2-16x}{(x^2+2)^2}\right)$
D) $f'(x) = \frac{-x^4+8x^3-8x^2+4}{(x^2+2)^2(x-1)^2}$.

Question 3 : La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de f est :

A) $f(x) = \frac{(-1/3)}{x-1} + \frac{(4/3)x-(8/3)}{x^2+2}$
B) $f(x) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{4x+8}{x^2+2}\right)$
C) $f(x) = \frac{-3}{x-1} + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{x-\sqrt{2}} + \frac{2(\sqrt{2}-1)}{x+\sqrt{2}}$
D) $f(x) = 1 - \frac{3}{x-1} + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{x-\sqrt{2}} - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{x+\sqrt{2}}$

Equation différentielle

Question 4 : On considère l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y'(x) - 2xy(x) = x^2$.
Une solution homogène sur $V =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ est :

A) $y_h(x) = C(1-x^2)$ avec $C \in \mathbb{R}$.
B) $y_h(x) = C(1+x^2)$ avec $C \in \mathbb{R}$.
C) $y_h(x) = \frac{C}{1-x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
D) $y_h(x) = -\ln(1-x^2) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 5 : On montrer que la fonction y_p est une solution particulière de (E) sur V avec :

A) $y_p(x) = \frac{x^3}{3}$.
B) $y_p(x) = \frac{x^3}{3}(1-x^2)$.
C) $y_p(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$.
D) $y_p(x) = \frac{x^3}{3}\ln(1-x^2)$.

Question 6 : Une solution du problème de Cauchy sur $]1,+\infty[$ avec $y(2) = -1$ est donnée par :

A) $C = 0$.
B) $C = 1/3$.
C) $C = 5/3$.
D) $C = -1$.

Suite récurrence linéaire

Question 7 : La suite définie par $a_n = \frac{1}{2^n} + 2^n$ vérifie :

A) $2a_{n+2} + 5a_{n+1} + 2a_n = 0$.
B) $2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$.
C) $2a_{n+2} - 3a_{n+1} - 2a_n = 0$.
D) $2a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n = 0$.

Question 8 : Soit (u_n) définie par la relation de récurrence $(R) : 3u_{n+2} + 2u_{n+1} - 5u_n = 0$ et par $u_0 = 1$ et $u_1 = 13/3$. Les réels q tels que la suite géométrique (q^n) vérifie la relation (R) sont :

A) $q_1 = \frac{5}{3}$ et $q_2 = 1$.
B) $q_1 = \frac{5}{3}$ et $q_2 = -1$.
C) $q_1 = -\frac{5}{3}$ et $q_2 = 1$.
D) $q_1 = -\frac{5}{3}$ et $q_2 = -1$.

Question 9 : La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

A) $u_n = 2q_1^n - q_2^n$.
B) $u_n = -\frac{5}{4}q_1^n + \frac{9}{4}q_2^n$.
C) $u_n = -5q_1^n + 4q_2^n$.
D) $u_n = \frac{1}{3}q_1^n + \frac{2}{3}q_2^n$.

Continuité et Dérivabilité

Question 10 : Soit f définie par $f(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

A) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
B) $f'(0) = 1$
C) f n'est pas dérivable en 0.
D) $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Question 11 : Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x+1}{e^{1/x}}$.

A) La courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.
B) La courbe représentative de f admet $y = x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
C) La courbe représentative de f admet $y = -x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
D) La courbe représentative de f admet $y = 0$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

Question 12 : Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1 + \sin^2 x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

A) f est continue en 0.
B) f n'est pas dérivable en 0.
C) f est périodique de période π.
D) f n'admet pas de limite en ∞.

Partie 2 : Problèmes à rédiger - durée 1h30

Problème I : Soient deux suites réelles définies par : $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}.$$

1. Montrer que les suites sont bien définies.
2. Montrer que a_n et b_n sont des rationnels.
3. Montrer que a_nb_n est stationnaire.
4. Déterminer le signe de $b_n - a_n$.
5. Montrer que les suites sont adjacentes et déterminer si la limite est rationnelle.

Problème II : On recherche les fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$.

1. On commencer par étudier les fonctions $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
   (b) Déterminer le signe de g.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit une suite par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = x$.
   (a) Montrer que la suite $v_n = \varphi(u_n)$ est constante.
   (b) Montrer que $u_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
   (c) Montrer que $u_n \to_{+\infty} 0$.
3. En déduire l'ensemble solution de l'équation fonctionnelle.

Problème III : On recherche à étudier la fonction $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x}$.

1. Montrer que f est une fonction impaire et déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $\forall x > 0, \operatorname{th}(x) < x < \operatorname{sh}(x)$. En déduire que $\operatorname{sh} x =_{x\to 0} x + o(x)$.
3. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire les variation de f.
5. Montrer que $\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{1+\operatorname{ch} x}$ et en déduire que $\operatorname{ch}(x) =_{x\to 0} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
6. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
7. Tracer la courbe représentative de f.