DM4 - Corrigé

Exercice 1 :

1. La fonction $\ln(1+x)-x$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et sa dérivée est $\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$. Donc elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet un maximum global en 0. Donc pour tout $x>-1, \ln(1+x)-x \leq \ln(1+0)-0=0$.
2. On calcul les accroissements :
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(-\frac{1}{n+1}\right) \leq 0 \text{ avec } x=\frac{-1}{n+1}>-1 \end{aligned}$$
Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
De manière analogue, on trouve $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante :
$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0 \text{ avec } x=\frac{1}{n}>-1. \end{aligned}$$
3. On montre que les suites sont adjacentes. On dispose des conditions de monotonies. La différence : $u_n-v_n=\dfrac{1}{n}$ est positive et tend vers 0, donc u_n et v_n sont adjacentes et admettent une limite commune notée γ .
4. On a : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=u_n+\ln(n)\to+\infty$ par opération.
5. On a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k}=S_{pn}-S_n$
$=u_{np}+\ln(np)-u_n-\ln(n)=u_{np}-u_n+\ln(p)\to\gamma-\gamma+\ln p=\ln p.$

Exercice 2 :

1. On a $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)-b=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}-b=\dfrac{g(x)+b+g(y)+b}{2}-b$
$=\dfrac{g(x)+g(y)}{2}$.
2. Soit $t\in\mathbb{R}$. On prend $x=2t$ et $y=0$. On a $g(t)=g((2t+0)/2)=\dfrac{g(2t)+g(0)}{2}=g(2t)/2$. car $g(0)=f(0)-b=0$. Donc $g(2t)=2g(t)$.
Puis $g(x+y)=g\left(\dfrac{2x+2y}{2}\right)=\dfrac{g(2x)+g(2y)}{2}=\dfrac{2g(x)+2g(y)}{2}=g(x)+g(y)$.
3. Soit $x\in\mathbb{R}$. On fait une récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
Init. Pour $n=0$ $g(0x)=0$ et $0g(x)=0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(nx) = ng(x)$.
On a $g((n+1)x) = g(nx+x) = g(nx) + g(x) = ng(x) + g(x) = (n+1)g(x)$.
Conclusion la relation est valide pour $n \geq 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x = t, y = -t$. On a $g(t)+g(-t) = g(t-t) = g(0) = 0$. Donc $g(-t) = -g(t)$.
La fonction est impaire. Ainsi $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$ et la relation est valide pour $n \in \mathbb{Z}$.

4. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
   On a $g(rx) = pg\left(\dfrac{x}{q}\right)$ d'après ce qui précède.
   Et $g(x) = g\left(q\dfrac{x}{q}\right) = qg\left(\dfrac{x}{q}\right)$. Donc $g\left(\dfrac{x}{q}\right) = \dfrac{1}{q}g(x)$.
   Ainsi $g(rx) = p\dfrac{1}{q}g(x) = rg(x)$.
5. On sait que f est continue en 0. Donc par opération g est continue en 0. Ainsi $\lim\limits_{0} g = g(0) = 0$.
   Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. On a $g(a+h) = g(a) + g(h) \to_{h \to 0} g(a) + 0$ par opération. Donc $\lim\limits_{a} g = g(a)$ et g est continue en a.
6. On pose $a = g(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Q}$ tel que $x_n \to x$.
   On a $g(x_n) \to g(x)$ car g est continue en x.
   Et $g(x_n) = x_n g(1) = ax_n \to ax$ par opération.
   Donc par unicité de la limite $g(x) = ax$.
7. On a pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + b = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   Réciproquement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax + b$ alors f est continue en 0. et pour $x, y \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = a\dfrac{x+y}{2} + b = \dfrac{ax+b}{2} + \dfrac{ay+b}{2} = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
   Donc l'ensemble des solutions sont les fonctions affines.