DM4 : Dérivabilité et Matrice
à rendre le lundi 6 janvier 2025.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que :
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0.$$
   (a) Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.
   (b) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

Exercice 2 : Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{5}(2I_3 + J)$.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes et démontrent le même résultat.

1. (Méthode du Polynôme annulateur)
   (a) Montrer que $J^2 = 3J$ et en déduire un polynôme annulateur de A de degré 2.
   (b) En déduire que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$ pour tout entier $n \geq 1$ avec des coefficients α_n et β_n que l'on déterminera.
2. (Méthode du Binôme de Newton)
   (a) Calculer J^n pour tout entier $n \geq 1$ en fonction de J.
   (b) En déduire que $A^n = a_n I_3 + b_n J$ pour tout entier $n \geq 1$ avec des coefficients a_n et b_n que l'on déterminera.