DL3 : Révision du 1er semestre

Exercice 1 : Résoudre $2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0$. *Méthode : Polynôme de degré* 2

Exercice 2 : Résoudre l'équation pour $x\in\mathbb{R}$: $2\cos x-2\sin x=\sqrt{6}$.
Méthode : $a\cos\theta+b\sin\theta=A\cos(\theta-\varphi)$

Exercice 3 : Résoudre $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}$.

Exercice 4 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$. *Méthode :* $\Delta\in\mathbb{C}$

Exercice 5 : Résoudre pour $z\in\mathbb{C}, z^5+i=0$. *Méthode : Utiliser* $\mathbb{U}_5$

Exercice 6 : Résoudre pour $z\in\mathbb{C}, (z+2)^5=(-z+3)^5$.

Exercice 7 : Résoudre $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n=2\cos(\alpha)$. *Méthode : Système somme/produit*

Exercice 8 : Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Soient M d'affixe z, N d'affixe $1/z$ et P d'affixe $1-z$. Pour quelles valeurs M,N et P appartiennent à un même cercle de centre 0.

Exercice 9 : Montrer que $f:\mathbb{C}-\{3\}\to\mathbb{C}-\{2\}$ définie par $f(z)=\frac{2z+1}{z-3}$ est bijective.

Exercice 10 : Montrer que $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f^{-1}(y)$.

Exercice 11 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. on munit $\mathbb{Z}$ de la relation définie par $x\mathcal{R}y$ si $(x-y)/n\in\mathbb{Z}$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Montrer qu'il y a un nombre fini de classes d'équivalence.

Exercice 12 : Déterminer une expression explicite de $u_0=0$ et $u_{n+1}=iu_n+1$ puis sa limite.
Méthode : suite arithmético-géométrique puis étude du module de $|u_n-l|$

Exercice 13 : Déterminer une expression explicite de $u_0=1$ et $u_1=1$ et $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$ puis établir sa divergence sans limite.
Méthode : Suite récurrente linéaire d'ordre puis suites extraites

Exercice 14 : Montrer que $\forall x\geq 0, 1+x/2-x^2/8\leq\sqrt{1+x}\leq 1+x/2$. *Méthode : IAF*
En déduire la limite de $\sqrt{(n+a)(n+b)}-n$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour des paramètres $a,b>0$. *Méthode : Thm d'encadrement*

Exercice 15 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=10$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$. Etudier la nature de la suite.
Méthode : Point fixe puis Thm de convergence monotone

Exercice 16 : On construit deux suite par $0<u_0<v_0$, $u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$.
Montrer que u_n et v_n convergent vers la même limite. *Méthode : Suites adjacentes*

Exercice 17 : Etudier la continuité de $x\mapsto\frac{x-E(x)}{x+E(x)}$.
Méthode : Par opérations puis ponctuellement limite à gauche/à droite

Exercice 18 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\lim_{-\infty}f=\lim_{+\infty}f=+\infty$. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq f(c)$. *Méthode : Thm de la borne atteinte sur un segment*

Exercice 19 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer que $\forall a>0, \exists c\in\mathbb{R}, f(c+a)=f(c)$.
Méthode : TVI sur une fonction auxiliaire

Exercice 20 : Soit $f:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}, x\mapsto\sqrt{\sin x}+x$.
Montrer que f réalise une bijection. Déterminer sur quel domaine f^{-1} est dérivable. *Méthode : Thm de la bijection continue et opération sur les dérivées*

Exercice 21 : Soit f continue sur $[0,1]$ dérivable sur $]0,1[$ vérifiant $f(0)=0$ et f' ne s'annule pas sur $]0,1[$. Montrer que f est de signe constant sur $]0,1[$.
Méthode : Par l'absurde, TVI puis TAF