

DM5 - corrigé

- Exercice 1 :**
1. (a) Par hypothèse, la fonction f s'annule en $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.
Pour $0 \leq k < n$, la fonction f est de classe C^1 sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$ et $f(a_k) = f(a_{k+1})$.
D'après le théorème de Rolle, il existe $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(b_k) = 0$.
Ainsi on a trouvé n réels $b_0 < b_1 < \dots < b_{n-1}$ qui annulent f' .
 - (b) On montre par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $f^{(k)}$ s'annule au moins $(n+1-k)$ fois.
On a l'initialisation pour $k=0$ (hypothèse de l'énoncé) et $k=1$ (question a.)
Hérédité. Soit $k < n$ et $\alpha_0 < \dots < \alpha_{n-k}$ les $(n+1-k)$ racines de $f^{(k)}$. La fonction $f^{(k)}$ est de classe C^{n+1-k} sur $\mathbb{R}$ donc au moins C^1 sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et $f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1})$.
D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(\beta_i) = (f^{(k)})'(\beta_i) = 0$.
On obtient donc $\beta_0 < \dots < \beta_{n-k-1}$ qui sont $(n-k)$ racines de $f^{(k+1)}$.
Conclusion. Pour $k=n$, on a donc l'existence d'une racine de $f^{(n)}$.
 2. (a) On a f de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $f(0) = f(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
Donc f' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.
 - (b) On montre par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que $f^{(k)}$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.
L'initialisation $k=1$ est vue dans la question a.
Hérédité. Soit $1 \leq k < n$ et $c \in]0, 1[$ une racine de $f^{(k)}$.
La fonction $g = f^{(k)}$ est de classe C^{n-k} sur $[0, 1]$ donc au moins C^1 sur le segment $[0, c]$. De plus $g(0) = f^{(k)}(0) = 0 = f^{(k)}(c) = g(c)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]0, c[$ tel que $g'(d) = 0$. Ainsi $d \in]0, 1[$ est une racine de $g' = f^{(k+1)}$.
Conclusion. Pour $k=n$, on trouve que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

Exercice 2 : 1. (Méthode du Polynôme annulateur)

- (a) Un calcul matriciel donne $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$.

La relation de l'énoncé s'écrit $J = 5A - 2I_3$ et permet d'obtenir $(5A - 2I_3)^2 = 3(5A - 2I_3)$.

On en déduit $25A^2 - 35A + 10I_3 = 0$. Donc $P(X) = 5X^2 - 7X + 2$ est un polynôme annulateur.

- (b) On réalise la division euclidienne de X^n par $P(X)$, on obtient formellement :

$$X^n = Q_n(X)P(X) + R_n(X) \text{ avec } R_n(X) = \alpha_n X + \beta_n.$$

Les racines de P sont 1 et $2/5$. On en déduit le système :
$$\begin{cases} 1^n &= \alpha_n + \beta_n \\ (2/5)^n &= (2/5)\alpha_n + \beta_n \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} \alpha_n &= (5/3)(1 - (2/5)^n) \\ \beta_n &= -(2/3) + (5/3)(2/5)^n. \end{cases}$$

$$\text{Puis } A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(2/5)^n & 1-(2/5)^n & 1-1(2/5)^n \\ 1-(2/5)^n & 1+2(2/5)^n & 1-(2/5)^n \\ 1-(2/5)^n & 1-(2/5)^n & 1+2(2/5)^n \end{pmatrix}.$$

2. (Méthode du Binôme de Newton)

- (a) On a $J^2 = 3J$ donc on montre par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.
En effet $J^1 = 3^0 J$ puis $J^{k+1} = 3^{k-1}JJ = 3^{k-1}(3J) = 3^k J$.

- (b) On peut donc appliquer la formule du binôme sur $2I_3$ et J qui commutent pour obtenir :

$$A^n = 5^{-n}(2I_3 + J)^n = 5^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} J^k = 5^{-n} 2^n I_3 + 5^{-n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} J.$$

$$\text{Ainsi } a_n = 5^{-n} 2^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{et } b_n = 5^{-n} \sum_{k=1}^n 2^{n-k} 3^{k-1} = 5^{-n} 3^{-1} ((2+3)^n - 2^n) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$