Corrigé ENAC EPL/S Mathématiques 2023

Jérémy Larochette – Lycée Leconte de Lisle – La Réunion

Avril 2023

Résumé des réponses :

1	A		?		
2				D	
3	A	B			
4	A			D	
5	A				
6			C		
7			C		
8	A				
9				D	
10		B			
11				D	
12			C		

13				D	
14			C		
15			C		
16		B			
17	A				
18					E
19	A	B			
20		B	C		
21			C		
22					E
23		B			
24	A				

25					E
26			C		
27				D	
28		B			
29	A				
30		B		D	
31		B			
32					E
33	A		C		
34	A				
35		B	C		
36				D	

Question 1 : La négation de $\Big(\exists x \in E,\ A(x)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x \in E,\ A(x)\Big)$ est $\Big(\exists x \in E,\ A(x)\Big) \wedge \Big(\exists x \in E,\ \neg A(x)\Big)$.

La réponse A est correcte et la réponse B est incorrecte.

La négation de $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$ est $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N$. Cependant, quitte à changer N en $N+1$, cela se réécrit $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N$ (et, d'ailleurs, les deux propositions étant fausses, elles sont équivalentes) mais qu'attend-on dans cette question ? Sans doute de répondre que la réponse C est incorrecte ?

La négation de $\exists! x \in \mathbb{R},\ x = x^2$ est $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x^2$ ou $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq y$, $x = x^2$ et $y = y^2$. Cette fois, pas dambiguïté, $\exists! x \in \mathbb{R},\ x = x^2$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x^2$ sont toutes les deux fausses (0 et 1 vérifient $x = x^2$), donc la réponse D est incorrecte.

Question 2 : La réponse A est incorrecte car $0 + 0^2 \neq 1$.

La réponse B est incorrecte car $2 + y^2 = 1$ n'a pas de solution réelle.

La réponse C est incorrecte car un tel x vaudrait 1 avec $y = 0$ et 0 avec $y = 1$ à la fois.

La réponse D est correcte car $0 + 1^2 = 1$.

Question 3 : La réponse A est correcte : s'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) \leqslant 0$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_2) \geqslant 0$, alors la continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires donnent l'existence de $x \in [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

La réponse B est correcte : il s'agit de la contraposée de $P \Rightarrow Q$ qui est vraie car une fonction nulle s'annule.

Ainsi, les réponses C et D sont incorrectes.

Question 4 : $\boxed{\text{Les réponses A et D sont correctes}}$ car en restreignant au départ une fonction injective, on conserve la propriété d'avoir au plus un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée de la fonction et en prolongeant au départ une fonction surjective, on conserve la propriété d'avoir au moins un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée de la fonction.

Ainsi, $\boxed{\text{les réponses B et C sont incorrectes.}}$

Question 5 : $\boxed{\text{La réponse A est correcte}}$ car $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est bijective.

$\boxed{\text{La réponse B est incorrecte}}$ car $g(1) = g(3)$.

$\boxed{\text{Les réponses C et D sont incorrectes}}$ car $f \circ g = g \circ f = g$.

Question 6 : $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x}$ est définie sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$.

Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ or, si $x \geqslant 1$, tout étant positif,

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} \in]-1,1[&\iff \frac{2\sqrt{x-1}}{x} < 1 \iff 2\sqrt{x-1} < x \iff 4(x-1) < x^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0 \iff x \neq 2 \end{aligned}$$

donc f est dérivable sur $]1, +\infty[\setminus\{2\}$.

$\boxed{\text{Seule la réponse C est correcte.}}$

Question 7 : On résout le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & (1-a)b & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & b-a \end{array}\right)$$

Ainsi, $\left\{\begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array}\right.$ est équivalent à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)by & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (1-a)(2+a)z & = & b-a \end{array}\right.$

Donc si $a \notin \{-2, 1\}$, le système admet une unique solution : $\boxed{\text{la réponse D est incorrecte.}}$

Si $a = b = 1$, le système devient $x+y+z = 1$ et admet une infinité de solution : $\boxed{\text{la réponse A est incorrecte.}}$

Si $a = -2$ et $b \neq -2$, le système n'a pas de solution : $\boxed{\text{la réponse B est incorrecte.}}$

Si $a = b = -2$, le système est équivalent à $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & 6y & + & 3z & = & -3 \end{array}\right.$ qui permet de tirer y puis z en fonction de x, le système admet une infinité de solution : $\boxed{\text{la réponse C est correcte.}}$

Question 8 : On résout sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$, avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq -1$ sur D,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &\iff \mathrm{i} - z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{i} + z) \iff \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) z = \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \\ &\iff z = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)}\right)} = -\frac{2\cos(\theta/2)}{2\mathrm{i}\sin(\theta/2)} = \mathrm{i}\,\mathrm{cotan}(\theta/2) \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{seule la réponse A est correcte.}}$

Question 9 :

$$\begin{aligned}\sin(5\theta) &= \sin(4\theta+\theta) = \sin(4\theta)\cos(\theta)+\cos(4\theta)\sin(\theta)\\ &= 2\sin(2\theta)\cos(2\theta)\cos(\theta)+\left(2\cos^2(2\theta)-1\right)\sin(\theta)\\ &= 4\sin(\theta)\left(1-2\sin^2(\theta)\right)\cos^2(\theta)+\left(2\left(1-2\sin^2(\theta)\right)^2-1\right)\sin(\theta)\\ &= \left(4\sin(\theta)-8\sin^3(\theta)\right)\left(1-\sin^2(\theta)\right)+\left(8\sin^4(\theta)-8\sin^2(\theta)+1\right)\sin(\theta)\\ &= 4\sin(\theta)-8\sin^3(\theta)-4\sin^3(\theta)+8\sin^5(\theta)+8\sin^5(\theta)-8\sin^3(\theta)+\sin(\theta)\\ &= 16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Seule la réponse D est correcte,}}$ les autres ne le sont pas par unicité des cœfficients d'un polynôme, $\sin(\theta)$ prenant une infinité de valeurs.

Question 10 : Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda x^{3/2} \pm \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}(2\lambda x \pm 1)$ n'est pas dérivable en 0.

Donc $\boxed{\text{les réponses A, C, D sont incorrectes.}}$

On commence par résoudre l'équation sur $]0,+\infty[$ on a alors $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ qui sont continues et $x \mapsto 2x$ qui ne s'annule pas.

On remarque que $x \mapsto x^{3/2}$ est solution de l'équation homogène associée $2xy' - 3y = 0$ et que $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ est solution particulière de l'équation initiale.

On en déduit que les solutions sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Une solution f sur $[0,+\infty[$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et est solution sur $]0,+\infty[$. On a donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f(x) = \lambda x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

On a aussi en prenant $x = 0$ dans l'équation que $f(x) = 0$.

Ainsi, pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lambda\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, ce qui contredit la dérivabilité de f en 0.

$\boxed{\text{La réponse B est correcte.}}$

Question 11 : On commence par remarquer que $\ln(2)-2 < 0$ (par exemple parce que $\mathrm{e}^2 > 2$), et $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, donc $\boxed{\text{la réponse B est incorrecte.}}$

Par une intégration par parties, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x &= \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln 2 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \ln 2 - 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La réponse A est incorrecte.}}$

Par un changement de variable $y = \mathrm{e}^x + 1$, « $\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ », on a

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{y-1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \int_2^3\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x}\right]_2^3 = 2\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\boxed{\text{La réponse C est incorrecte et la réponse D est correcte.}}$

Question 12 : Comme le triplet $(3,4,5)$ est pythagoricien, 2 est solution de l'équation et $\boxed{\text{la réponse D est incorrecte.}}$

Soit $f : x \mapsto \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x - 1 = \mathrm{e}^{x\ln(3/5)} + \mathrm{e}^{x\ln(4/5)} - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \ln(3/5)\left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \ln(4/5)\left(\dfrac{4}{5}\right)^x < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$.

Ainsi, f ne s'annule pas sur $]-\infty, 0]$ et par théorème de la bijection (f est bien continue strictement monotone), f induit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) =]1,-1[\ni 0$.

$\boxed{\text{La réponse C est la seule correcte.}}$

Question 13 : Soit $n \in \mathbb{N}$. $f : x \mapsto (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f' : x \mapsto n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$f'' : x \mapsto n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$

On a alors $f'(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ et $f''(1) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$\boxed{\text{Les réponses A et C sont incorrectes.}}$

Puis

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - k\right)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

$\boxed{\text{La réponse B est incorrecte et la réponse D est correcte.}}$

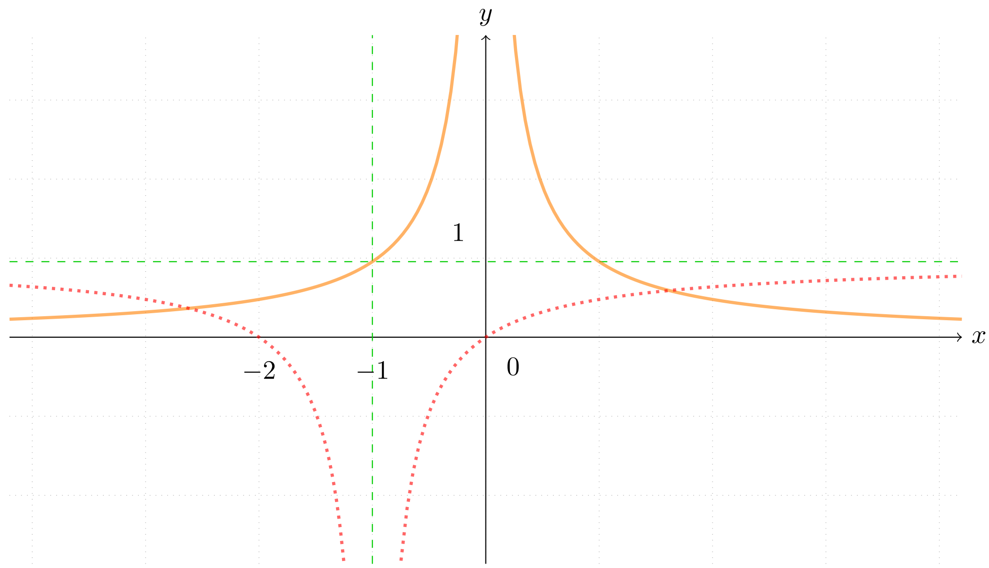
Question 14 : Il y a une erreur dans la notation $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n}$ au lieu de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. De plus, nous supposons qu'il faut avoir la relation demandée pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui n'est pas précisé.

On calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(i^2 + 2ij + j^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(ni^2 + n(n+1)i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)(4n+2+3n+3)}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Seule la réponse C est correcte.}}$

Question 15 : On répond à la question graphiquement en représentant les branches d'hyperbole de $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ (asymptotes $x = 0$ et $y = 0$) et $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{|x+1|}$ (asymptotes $x = -1$ et $y = 1$) sur un même graphe :



Seule la réponse C est correcte.

Question 16 : En posant $d = PGCD(x, y)$, on a $x', y' \in \mathbb{N}$ premier entre eux tels que $x = dx'$ et $y = dy'$. Alors $PPCM(x, y) = d \cdot PPCM(x', y') = dx'y'$.
On a alors

$$\begin{cases} PGCD(x,y) = 5 \\ PPCM(x,y) = 60 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 5 \\ x'y' = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 5 \\ (x', y') \in \{(1,12), (12,1), (3,4), (4,3)\} \end{cases}$$

Les couples solutions sont finalement $(5, 60)$, $(60, 5)$, $(15, 20)$ et $(20, 15)$.

Seule la réponse B est correcte.

Question 17 : On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a, avec $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

On a, sans calcul, que $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & \star & \star \\ 0 & 3^n & \star \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ ce qui élimine la réponse C. Le cas $n = 1$ élimine la B et la D.

Or A est la somme commutative de $3I_3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^n = 0_3$ si $n \geqslant 3$. La formule du binôme de Newton donne alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k = 3^n I_3 + n3^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} N^2$$

On a alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Seule la réponse A est correcte.

Question 18 : Par opérations élémentaires,

$$\operatorname{rg}(M) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-2 & 1 \\ m & 1-2m & 2-m \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m-2 \\ m & 2-m & 1-2m \end{pmatrix}$$
$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - (m-2)C_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 2-m & m^2-6m+5 \end{pmatrix}$$

Le discriminant de $m^2 - 6m + 5$ étant strictement positif, le rang est au moins 2, et vaut trois pour tout réel sauf deux. $\boxed{\text{Aucune réponse n'est correcte.}}$

Question 19 : $x_1 = (1;0;1)$ et $x_2 = (1;2;2)$ sont manifestement non colinéaires, donc $\boxed{\text{la réponse A est correcte.}}$

$x_1 = (1;0;0)$, $x_2 = (1;1;0)$ et $x_3 = (1;1;1)$ sont linéairement indépendants car $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc $\boxed{\text{la réponse B est correcte.}}$

Et ainsi $\boxed{\text{les réponses C et D sont incorrectes.}}$

(Cela se voit directement pour C car $x_2 = x_1 + x_3$ et pour D car $x_3 = -x_1$).

Question 20 : F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ donc admet comme supplémentaires les droites non contenues dans F, donc engendrées par une vecteur hors de F.

Cela élimine A car $(0,0,0,1) \in F$, et D car G n'est pas une droite.

Comme $(0,0,1,0), (0,1,0,0) \notin F$, $\boxed{\text{les réponses B, C sont les seules correctes.}}$

Question 21 : Comme $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E, dire que $\ker p = \operatorname{Im} p$ revient à dire que $\ker p = \operatorname{Im} p = E = \{0_E\}$ ce qui est exclu par l'énoncé. Donc $\boxed{\text{la réponse A est incorrecte.}}$

Si p est un projecteur non nul et $E \neq \{0_E\}$, $(2p)^2 = 4p^2 = 4p \neq p$ car $3p$ n'est pas l'endomorphisme nul, donc $\boxed{\text{la réponse B est incorrecte.}}$

$\boxed{\text{La réponse C est correcte,}}$ c'est du cours.

Si p est un projecteur, $2\operatorname{id}_E - p$ en est un si et seulement si

$$2\operatorname{id}_E - p = (2\operatorname{id}_E - p)^2 = 4\operatorname{id}_E - 4p + p^2 = 4\operatorname{id}_E - 3p$$

si et seulement si $p = \operatorname{id}_E$. Donc $\boxed{\text{la réponse D est incorrecte.}}$

Question 22 : On a $(1,-1,0) \in H$ qui doit être invariant par s. Or

- dans la réponse A, on obtient $s(1,-1,0) = \left(\frac{13}{6}, \star, \star\right)$;
- dans les réponses B, C, D, on obtient $s(1,-1,0) = \left(\frac{4}{3}, \star, \star\right)$.

$\boxed{\text{Aucune réponse n'est correcte.}}$

On peut aussi chercher l'expression de s. On cherche la décomposition de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 = H \oplus L$:

$$(x,y,z) = (x',y',z') + \lambda(1,2,3) = (x' + \lambda, y' + 2\lambda, z' + 3\lambda)$$

ce qui revient à avoir $\begin{cases} x' = x - \lambda \\ y' = y - 2\lambda \\ z' = z - 3\lambda \\ x' + y' + z' = 0 \end{cases}$ On tire alors $x + y + z - 6\lambda = 0$ puis $\lambda = \dfrac{x+y+z}{6}$.

Enfin,

$$s(x,y,z) = (x',y',z') - \lambda(1,2,3) = (x' - \lambda, y' - 2\lambda, z' - 3\lambda) = (x - 2\lambda, y - 4\lambda, z - 6\lambda)$$

D'où $s(x',y',z') = \left(\dfrac{2x - y - z}{3}, \dfrac{-2x + y - 2z}{3}, -x - y\right)$

Question 23 : Vu la dernière colonne, M n'est pas inversible si $m = 0$, ce qui élimine les réponses C et D.
On calcule

$$\det M = m\begin{vmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4}}{=} m\begin{vmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ 0 & m+1 & -(m+1) & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2m(m+1)\begin{vmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} 2m(m+1)\begin{vmatrix} 1 & m & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$\underset{\text{dev } L_2}{=} 2m(m+1)\begin{vmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}{=} 2m(m+1)\begin{vmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -m(m-1) & -(m+1) \end{vmatrix}$$
$$= 2m(m+1)(-(m+1)+m(m-1)) = 2m(m+1)\left(m^2-2m-1\right)$$

Les racines de $X^2 - 2X - 1$ sont $1 \pm \sqrt{2}$.
Seule la réponse B est correcte.

Question 24 : On suppose que $n \geqslant 1$.
Il y a $|\mathfrak{S}_n| = n!$ résultats possibles, et en fixant la i^{e} boule à i, il reste à permuter tous les autres numéros soit $(n-1)!$ résultats avec rencontre au i^{e} tirage.

La probabilité étant uniforme ici, on obtient une probabilité égale à $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ d'avoir rencontre au i^{e} tirage.
Comme il y a un nombre moyen de rencontres égal à 1 pour le cas où $n = 1$ (tirages possibles $(1, 2)$ et $(2, 1)$), seule la réponse A est correcte.

Pour généraliser ce résultat, on peut s'intéresser à la variable aléatoire de Bernoulli X_i indiquant s'il y a rencontre au i^{e} tirage. On a donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Alors $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la variable aléatoire du nombre de rencontres et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Question 25 : On travaille dans l'univers égal à l'ensemble des cartes muni de la probabilité uniforme.
On a $\mathbb{P}(D) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.

- Avec A : « la carte est une figure », on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{3}{13}$ et $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(D) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)$ donc A et D ne sont pas indépendants : la réponse A est incorrecte.
- Avec A : « la carte n'est pas un as », on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{12}{13}$ et $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(D) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)$ donc A et D ne sont pas indépendants : la réponse B est incorrecte.
- Avec A : « la carte est la dame de pique », on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{52}$ et $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(D) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)$ donc A et D ne sont pas indépendants : la réponse C est incorrecte.
- Avec A : « la carte est un pique », on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cap D) = \dfrac{1}{52} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)$ donc A et D ne sont pas indépendants : la réponse D est incorrecte.

Question 26 : F est le plan vectoriel de vecteur normal u, $\boxed{\text{la réponse A est incorrecte.}}$

On calcule ensuite $\mathrm{d}(w, F) = \dfrac{|(u|w)|}{\|u\|} = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

$\boxed{\text{Seule la réponse C est correcte.}}$

Question 27 : On reconnaît une somme de Riemann, par continuité de $t \mapsto \sin(\pi t)$ sur $[0, 1]$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sim \frac{2n}{\pi} \to +\infty$.

$\boxed{\text{Seule la réponse D est correcte.}}$

Autre calcul possible :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\right)^k\right) = \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}\right) = \mathfrak{Im}\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}}\right)\\ &= \mathfrak{Im}\left(\frac{-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) = \frac{\mathfrak{Im}\left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \to +\infty\end{aligned}$$

Question 28 : On trouve $b = 1$ en multipliant par $(1+x)^2$ puis en évaluant en -1, puis $d = 1$ en multipliant par x^2 puis en évaluant en 0.

En multipliant par x puis en faisant $x \to +\infty$, on a alors $0 = a + c$ et en évaluant en $x = 1$, on a $\dfrac{1}{4} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{4} + c + 1$ donc $a + 2c = -2$.

D'où on tire $a = 2$ et $c = -2$, d'où $\dfrac{1}{x^2(1+x)^2} = \dfrac{2}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Alors, en séparant en somme de sommes de séries convergentes, avec un télescopage,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{6}\\ &= -2 + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} - 3.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Seule la réponse B est correcte.}}$

Question 29 : La valeur (et limite) en 0 rendent incorrectes immédiatement B et C.

On calcule

$$\begin{aligned}\ln(2 + \sin(x)) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= \ln 2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)\\ &= \ln 2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8}\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right)\\ &= \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Seule la réponse A est correcte.}}$

Question 30 : On calcule avec la propriété d'Euclide

$$\begin{aligned} PGCD(a,b) &= PGCD\left(2n^3+n^2+2n+5, n^2+1\right) \\ &= PGCD\left(n^2+1, 2n^3+n^2+2n+5-2n(n^2+1)\right) = PGCD(n^2+1, n^2+5) \\ &= PGCD\left(n^2+1, \left(n^2+5\right)-\left(n^2+1\right)\right) = PGCD\left(b,4\right) \end{aligned}$$

Si n est pair, $b = n^2+1$ est impair et $PGCD(a,b) = 1 = PGCD(b,2)$.
Si n est impair, on a $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k+1$ et $b = n^2+1 = 4k^2+4k+2$ donc $PGCD(a,b) = PGCD\left(b,4\right) = 2 = PGCD(b,2) \neq PGCD(b,3)$ par exemple pour $n = 3$.

Donc $\boxed{\text{les réponses B et D sont les seules correctes.}}$

Question 31 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \Re e(z)$ et $b_n = \Im m(z)$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{5}$ et $b_{n+1} = b_n$, puis $a_n = \dfrac{a_0}{5^n}$ et $b_n = b_0$.
Ainsi $u_n \to 0 + \mathrm{i}b_0$.
$\boxed{\text{Seule la réponse B est correcte}}$ (sauf si $u_0 = 0$ pour A et C !).

Question 32 : On calcule

$$\sum_{k=1}^{50} 2k = 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 2550$$

et

$$\sum_{k=0}^{49} (2k+1) = \sum_{p=1}^{100} p - \sum_{k=1}^{50} 2k = \frac{100 \times 101}{2} - 2550 = 5050 - 2550 = 2500.$$

$\boxed{\text{Aucune réponse n'est correcte.}}$

Question 33 : On calcule, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

et de même, $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ donc $\boxed{\text{la réponse A est correcte.}}$
Le cas $n = 1$ permet de se convaincre que $\boxed{\text{la réponse B est incorrecte.}}$
En sommant les inégalités et par télescopage, on obtient

$$99 = \sqrt{10000} - 1 \leqslant \sqrt{10001} - 1 = \sum_{k=1}^{10000} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{10000} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = \sqrt{10000} = 100$$

Donc $\boxed{\text{la réponse C est correcte et la réponse D est incorrecte.}}$

Question 34 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_\lambda : x \mapsto \dfrac{x^2+1-2x(x+\lambda)}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{1-2\lambda x - x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Donc $f_\lambda(1) = \dfrac{\lambda+1}{2}$ et $f'_\lambda(1) = -\dfrac{\lambda}{2}$.
Cela permet déjà de conclure que les tangentes en C_λ ne sont pas toutes parallèles et encore moins confondues : $\boxed{\text{les réponses B et C sont incorrectes.}}$

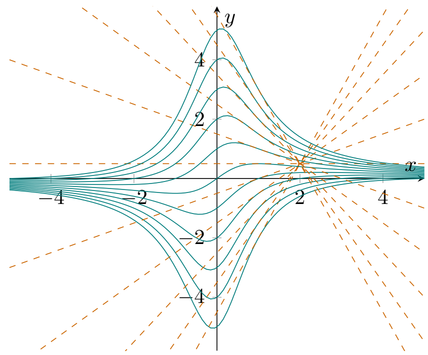
Pour $\lambda = 0$, la tangente est l'axe d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

Pour $\lambda = 1$, la tangente est d'équation $y = \dfrac{3-x}{2}$.

Elles s'intersectent au point de coordonnées $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Pour λ quelconque, la tangente est d'équation $y = -\frac{\lambda}{2}(x-1) + \frac{\lambda+1}{2}$. Pour $x = 2$, on obtient $y = \frac{1}{2}$.

Les tangentes sont donc toutes concourantes au point de coordonnées $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\boxed{\text{la réponse A est correcte}}$ et $\boxed{\text{la réponse D ne l'est pas.}}$



Question 35 : Soit M, A, B points d'affixe z, 2, $-\mathrm{i}$. Alors

$$\left|\frac{z-2}{z+\mathrm{i}}\right| = 1 \iff |z-2| = |z+\mathrm{i}| \iff \mathrm{d}(M,A) = \mathrm{d}(M,B).$$

Donc l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$ est la médiatrice du segment $[AB]$: $\boxed{\text{la réponse A est incorrecte et la réponse B est correcte.}}$
Puis

$$f(z) \text{ imaginaire pur} \iff \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \iff MAB \text{ triangle rectangle en } M$$

Donc l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ est imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$: $\boxed{\text{la réponse C est correcte et la réponse D est incorrecte.}}$

Question 36 : Soit $f : x \mapsto \arccos(x) - \arcsin(2x)$ définie, continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

$$f' : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

De plus, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} > 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$.

f étant continue et strictement monotone sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, le théorème de la bijection nous dit que l'équation $\arccos(x) = \arcsin(2x)$ admet une unique solution sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ puis sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ car les bornes ne sont pas solutions.
Donc $\boxed{\text{les réponses A et B sont incorrectes.}}$
Or, si x est solution, $\cos(\arccos x) = x = \cos\arcsin(2x)$.
Donc $x^2 = \cos^2(\arcsin(2x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(2x)) = 1 - (2x)^2 = 1 - 4x^2$.
On en déduit que $x^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Mais $f(0) = 1$ donc, vu sa monotonie, f ne s'annule pas sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, donc $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Finalement, $\boxed{\text{D est la seule réponse correcte.}}$

Fin du corrigé