Problème 1

Méthode 1 : Forme de la matrice

1. La matrice T est triangulaire inférieure donc T^n également et les coefficients diagonaux sont les puissances. Ainsi $T^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ a_n & 2^n & 0 \\ b_n & c_n & 1^n \end{pmatrix}$ avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$.

Puis $T^n T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n + 2^n & 2^{n+1} & 0 \\ b_n + c_n + 1 & 2c_n + 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $TT^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n + 1 & 2^{n+1} & 0 \\ 1 + a_n + b_n & c_n + 2^n & 1 \end{pmatrix}$.

Donc on obtient $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2^n = 2a_n + 1 \\ b_{n+1} = a_n + b_n + 1 = c_n + b_n + 1. \\ c_{n+1} = 2c_n + 1 = c_n + 2^n \end{cases}$.

2. On a $a_n = c_n = 2^n - 1$ en identifiant les coefficients de $TT^n = T^n T$.

Autres méthodes :

L'expression $a_{n+1} = 2a_n + 1$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe -1 et de premier terme 0 . Donc $a_n = 2^n(0 - (-1)) + (-1) = 2^n - 1$.

L'expression $a_{n+1} = a_n + 2^n$ et $a_0 = 0$ permet d'écrire :

$$a_n = a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

3. On a $b_0 = 0$ et $b_n = b_n - b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$ par télescopage.

Donc $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$.

4. $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : Formule du binôme de Newton

5. On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Elle vérifie $A^2 = A$. Elle est donc idempotente.

Ainsi $\forall n \geq 1, A^n = A$.

6. On a $AI_3 = I_3A$ donc on peut appliquer la FBN.

Ainsi $T^n = (I_3 + A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A$.

Or $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$ d'après la FBN. Donc $T^n = I_3 + (2^n - 1)A$.

Ainsi $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 3 : Polynôme annulateur

7. On a $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3T - 2I_3$.

8. On effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ sous la forme :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + R_n(X) \text{ avec } R_n(X) = a_n X + b_n.$$

En $X = A$, on obtient $A^n = 0 + R_n(A) = a_n A + b_n I_3$.

On a $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$. en $X = 1$, on a $1^n = a_n + b_n$ et en $X = 2$, $2^n = 2a_n + b_n$.

On résout le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2^n \end{pmatrix}$ et on trouve $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.

Puis en $X = T$, on a $T^n = (2^n - 1)T + (2 - 2^n)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 4 : Diagonalisation

9. On applique l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan à la matrice augmenté $(P|I_3) \sim_L$

$$(I_3|P^{-1}). \text{ On trouve } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. On calcul $D = P^{-1}TP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

11. On commence par remarquer que $PDP^{-1} = PP^{-1}TPP^{-1} = T$.
 Init. $n = 0$ On a $T^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = PD^nP^{-1}$.
 Donc $T^{n+1} = T^nT = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
12. On a $T^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Problème 2

- La fonction f est continue car C^2 et prend des valeurs négatives et positives sur le segment $[a, b]$. Donc d'après le TVI il existe un $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- On peut appliquer le TAF entre a et α car la fonction est C^0 sur $[a, \alpha]$ et dérivable sur $]a, \alpha[$. Donc il existe $\beta \in]a, \alpha[$ tel que $f'(\beta) = \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} = \frac{-f(a)}{\alpha - a}$.
- On sait que $f(a) < 0$ et $a < \alpha$ donc $f'(\beta) > 0$. Puis f' est croissante sur I car f est convexe. Donc pour $x \geq \beta$, $f'(x) \geq f'(\beta) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $[\beta, b]$ donc en particulier sur $J = [\alpha, b]$ qui un intervalle plus petit.
- Soient $\alpha_1 < \alpha_2$ deux zéros distincts de la fonction. On sait que f est strictement croissante sur $[\alpha_1, b]$ qui contient α_2 donc $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ Absurde si l'on suppose que $f(\alpha_1) = 0 = f(\alpha_2)$.
- φ est de classe C^1 sur J car f' est C^1 et ne s'annule pas sur J .
 Pour $x \in J$, on calcule : $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \geq 0$. Car f, f' et f'' sont positives sur J .
 Donc φ est croissante sur J .
- Pour tout $x \geq \alpha$ par croissance de φ on a : $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha) = \alpha - f(\alpha)/f'(\alpha) = \alpha$.
 Et d'autre part, $x - \varphi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$.
- D'après la question précédente on a pour tout entier : $\alpha \leq u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq u_n$. Donc la suite est décroissante et minorée par α , la suite converge vers une limite l . En passant à la limite dans l'expression : $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, on obtient $l = \varphi(l)$ c'est à dire $l = l - f(l)/f'(l)$ puis $f(l) = 0$ par unicité du zéro on a $l = \alpha$.

Problème 3

Problème donné au Concours des 'Petites Mines' 2006.

Problème 4

Partie 1 : Récurrence matricielle de taille 3

- La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ convient à l'expression $U_{n+1} = MU_n$.

- Le système $MX = 0$ est homogène associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc les solutions sont } \begin{cases} x = -2y - z = 3z \\ y = -2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} . \text{ Ainsi } S_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $MX = 5X \Leftrightarrow (M - 5I_3)X = 0$ est homogène associé à la matrice

$$M - 5I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -14 & 7 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc les solutions sont } \begin{cases} x = 3y - z = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}. \text{ Ainsi } S_5 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice M n'est pas inversible car le système $MX = 0$ n'admet pas pour unique solution $X = 0$.

4. On sait déjà que $\lambda = 0$ et $\lambda = 5$ produisent des cas où ils existent des solutions non nulles. Soit $\lambda \notin \{0, 5\}$. On échelonne la matrice $M - \lambda I_3$ associée au système homogène $MX = \lambda X$.

$$\text{On a } M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 0 & 1 + 2\lambda - \lambda^2 & 2 + \lambda \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \text{ en permutant les lignes et divisant par } \lambda \neq 0$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & p(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } p(\lambda) = (-\lambda^2 + 2\lambda + 1) + 2(\lambda + 2) = -\lambda^2 + 4\lambda + 5 = -(\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Donc si $\lambda = -1$ alors $\text{rg}(M - \lambda I_3) = 2$ et il existe des solutions non nulles.

Si $\lambda \neq -1$ alors $\text{rg}(M - \lambda I_3) = 3$ et il n'existe pas de solution non nulle.

5. La méthode du pivot de Gauss-Jordan donne $(P|I_3) \sim_L (I_3|P^{-1})$ avec $P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 \\ -5 & -5 & 5 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{Puis } D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est bien une matrice diagonale.}$$

6. On obtient par récurrence immédiate $M^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } M^n = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5(5^n) + 25(-1)^n & 11(5^n) + 25(-1)^n & 7(5^n) - 25(-1)^n \\ 5(5^n) - 5(-1)^n & 11(5^n) - 5(-1)^n & 7(5^n) + 5(-1)^n \\ 10(5^n) - 10(-1)^n & 22(5^n) - 10(-1)^n & 14(5^n) + 10(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{On en déduit que } U_n = M^n U_0 = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25(5^n) - 25(-1)^n \\ 25(5^n) + 5(-1)^n \\ 50(5^n) + 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6} \text{ et } b_n = \frac{5^{n+1} + (-1)^n}{6} \text{ et } c_n = \frac{5^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Partie 2 : Récurrence matricielle de taille 2

7. On montre sans récurrence que $c_n = 2b_n$.

On a $c_{n+1} = 2a_n + 4b_n + 2c_n = 2(a_n + 2b_n + c_n) = 2b_{n+1}$ pour l'assertion est vrai à partir du rang 1.

Or on a $c_0 = 2$ et $b_0 = 1$. Donc $c_0 = 2b_0$ est vraie également au rang 0.

8. Ainsi $a_{n+1} = b_n + 2c_n = 5b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n + c_n = a_n + 4b_n$.

Donc la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ convient à la relation $V_{n+1} = AV_n$.

9. On a $\det(A) = -5 \neq 0$ donc A est inversible.

On peut utiliser plusieurs méthodes de calculs de puissance positive (c.f. Pb 1)

On a $A^2 = 4A + 5I_2$ donc le polynôme annulateur $X^2 - 4X - 5 = (X + 1)(X - 5)$ est annulateur. Puis $X^n = (X^2 - 4X - 5)Q_n(X) + R_n(X)$ avec $R_n(X) = a_nX + b_n$. Les coefficients a_n, b_n vérifient $-a_n + b_n = (-1)^n$ et $5a_n + b_n = 5^n$. Les solutions de ce système sont $a_n = \frac{5^n - (-1)^n}{6}$ et $b_n = \frac{5^n + 5(-1)^n}{6}$.

Donc pour $n \geq 0$, on a $A^n = a_nA + b_nI_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n + 5(-1)^n & 5^{n+1} - 5(-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}$

Pour $n \leq 0$, on peut vérifier la formule en testant $A^{-n}A^n = I_2$ pour montrer qu'elle également valide. On peut également utiliser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ qui donne le même résultat.

10. On a $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $V_n = A^n V_0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^{n+1} - 5(-1)^n \\ 5^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}$ la deuxième colonne de la matrice.

Ainsi on retrouve (de manière indépendante) $a_n = \frac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6}$ et $b_n = \frac{5^{n+1} + (-1)^n}{6}$.

Partie 3 : Application

11. On sait que $(-1)^n$ est négligeable devant 5^n donc $a_n \sim \frac{5^{n+1}}{6} \rightarrow +\infty$ et $b_n \sim \frac{5^{n+1}}{6} \rightarrow +\infty$.
Donc les trois suites tendent vers $+\infty$.