Devoir Surveillé de Mathématiques n° 6
le samedi 18 Janvier 2025 - durée 4h

Problème 1

Calculons les puissances de $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par quatre méthodes **indépendantes** .

Méthode 1 : Forme de la matrice

1. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ des coefficients $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 2^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$. Etablir une relation de récurrence entre ses suites.
2. Déterminer une expression explicite de a_n et c_n en fonction de n.
3. En calculant $\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} - b_k$, déterminer une expression explicite de b_n.
4. En déduire la valeur de T^n.

   Méthode 2 : Formule du binôme de Newton
5. On note $A = T - I_3$. Calculer les puissances de A.
6. En déduire la valeur de T^n.

   Méthode 3 : Polynôme annulateur
7. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $T^2 = aT + bI_3$.
8. En déduire la valeur de T^n.

   Méthode 4 : Diagonalisation
9. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
10. Calculer $D = P^{-1}TP$.
11. Montrer par récurrence que $T^n = PD^nP^{-1}$
12. En déduire la valeur de T^n.

Problème 2

On considère f une fonction de classe C^2 convexe sur $I = [a, b]$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$.

1. Montrer qu'il existe un $\alpha \in I$ vérifiant $f(\alpha) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $a < \beta < \alpha$ tel que $f'(\beta) = \frac{-f(a)}{\alpha - a}$.
3. En déduire que f est strictement croissante sur $J = [\alpha, b]$.
4. Montrer qu'un tel zéro $\alpha \in I$ est nécessairement unique.

Définissons l'application $\varphi : J \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

5. Montrer que φ est bien définie de classe C^1 et est croissante sur J.
6. Montrer que pour tout $x \in J, \alpha \leq \varphi(x) \leq x$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, définie par $u_0 = b$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, tend vers α.

Problème 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie par $f_n(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x} - \frac{x}{n}$.
On note f_0 la fonction définie par $f_0(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f_n.
2. f_n est-elle paire ou impaire ?
3. f_n est-elle 2π-périodique ?
4. Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier.

Étude de la fonction f_0.

5. Etudier la dérivabilité de f_0 sur D. Déterminer l'expression de sa dérivée.
6. Etudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.
7. Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser l'approximation $\sqrt{3} = 1,732$)
8. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$.
   En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Utilisation d'une primitive de f_0.

9. Déterminer une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$. En déduire $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{2-\cos t}\, dt$.
   Soit l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \frac{\sin x}{2-\cos x} y(x) = 2\sin(x)$.
10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).
11. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
    Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
12. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie : $h(0) = 1$.

Étude de la fonction : $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x(2-\cos x)}$

13. Déterminer le domaine de définition de g.
14. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
15. Montrer l'encadrement $x - \frac{x^3}{3} \leq \frac{\sin x + x\cos x}{2} \leq x$ pour $x > 0$.
16. Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.
    On admet que g est dérivable sur $]0, \pi]$ et que pour tout x de $]0, \pi]$, $g'(x)$ est strictement négatif.
17. Montrer que g est une bijection entre $[0, \pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

Étude d'une suite qui annule f_n.

Soit n un entier naturel non nul.

18. Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n , alors a appartient à l'intervalle $[0, n\sqrt{3}]$.
19. Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $]0, \pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
20. Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

Problème 4

On considère les suites définies par $\begin{cases} a_{n+1} &= b_n + 2c_n \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n + c_n \\ c_{n+1} &= 2a_n + 4b_n + 2c_n \end{cases}$ et les conditions $\begin{cases} a_0 &= 0 \\ b_0 &= 1 \\ c_0 &= 2 \end{cases}$

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Récurrence matricielle de taille 3

On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = MU_n$.
2. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec x, y et z des réels.
   Résoudre les systèmes linéaires $MX = 0$ et $MX = 5X$.
3. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, préciser son inverse.
4. Déterminer trois réels λ tel qu'il existe $X \neq 0$ vérifiant $MX = \lambda X$.
5. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}MP$.
   Préciser les coefficients de P^{-1} et de D.
6. En déduire une expression explicite de chacune des trois suites $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$.

Partie 2 : Récurrence matricielle de taille 2

7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 2b_n$.
8. Notons $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $V_{n+1} = AV_n$.
9. Montrer que A est inversible et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
10. En déduire une expression explicite de chacune des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.

Partie 3 : Application

11. En utilisant les questions précédentes, déterminer, si elles existent, les limites des ces suites.