DEUXIEME PROBLEME

1. $f_n(x)$ est définie si et seulement si $2-\cos x$ est non nul. Or comme pour tout x de $\mathbb{R}$ $|\cos x|\leq 1$, alors $\cos x \neq 2$ donc D est égal à $\mathbb{R}$.

2. Le domaine D de f_n est symétrique. Soit x un élément de D.

$f_n(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{2-\cos(-x)}-\dfrac{-x}{n}=-\dfrac{\sin x}{2-\cos x}+\dfrac{x}{n}=-f_n(x)$ donc f_n est impaire. Même chose pour f_0.

3. Soit x un réel quelconque. Si $n\neq 0$ $f_n(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{1-\cos(x+2\pi)}-\dfrac{x+2\pi}{n}=f_n(x)-\dfrac{2\pi}{n}$. La fonction n'est pas périodique si $n\neq 0$. Par contre $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_0(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{1-\cos(x+2\pi)}=f_0(x)$ donc f_0 périodique de période 2π.

4. Soit $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit C_n la courbe de f_n dans R. Si on trace la courbe pour x appartenant à $[0,\pi]$ par symétrie par rapport à O comme f_n est impaire alors on a également la courbe pour x appartenant à $[-\pi,0]$. Soit t un réel. Soit $P(t)$ le point de coordonnées dans R $(t, f_m(t))$ alors $\overrightarrow{P(t)P(t+2\pi)}=2\pi\vec{i}-\dfrac{2\pi}{n}\vec{j}$ donc on déduit la courbe de f_n sur $[\pi,3\pi]$ par translation de la courbe de f_n sur $[-\pi,\pi]$ et ainsi de suite on a la courbe sur tout $\mathbb{R}$. De même pour f_0.

Etude de f_0 :

5. f_0 est le quotient de la fonction sin et de la fonction $x\mapsto 2-\cos(x)$ qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc f_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_0'(x)=\dfrac{\cos x(2-\cos x)-\sin x(\sin x)}{(2-\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}$.

6. $f_0'(x)$ est même signe que $2\cos x-1$ or

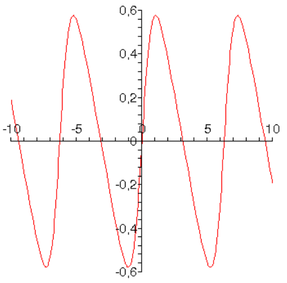
$2\cos x-1>0 \Leftrightarrow \cos x>\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow x<\dfrac{\pi}{3}$ car cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$

Donc pour $x\in[0,\pi]$ $f_0'(x)>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{\pi}{3}$

7.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f_0'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{3}$
$f_0(x)$	0	$\uparrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\downarrow$	0

$$f_0(\frac{\pi}{3})=\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{2-\cos(\frac{\pi}{3})}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



8. En regardant le tableau de variations de f_0 on remarque : $\forall x \in [0,\pi]$ $0 \leq f_0(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ du fait que f_0 est impaire on a : $\forall x \in [-\pi,0]$ $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq f_0(x) \leq 0$ donc le maximum sur $[-\pi,\pi]$ atteint par f_0 est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et son minimum est $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Comme la fonction f_0 est périodique de période 2π ce sont le maximum et le minimum atteint par f_0 sur $\mathbb{R}$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f_0(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc le maximum de $|f_0|$ est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Etude d'une primitive de f_0.

9. sin est la dérivée de la fonction : $x \mapsto 2-\cos x$ donc une primitive de f_0 est l'application $F : x \mapsto \ln(2-\cos x)$ F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}dx = F(\frac{\pi}{3}) - F(0) = \ln(2-\cos(\frac{\pi}{3})) - \ln(2-\cos(0)) = \ln\frac{3}{2}$

10. Vu les théorèmes de cours sur les équations différentielles les solutions de l'équation différentielles (H) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{-F(x)} = \lambda e^{-\ln(2-\cos(x))} = \frac{\lambda}{2-\cos x}$ où λ est un réel quelconque.

11. On cherche une solution particulière y de (E) telle qu'il existe a et b de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = a\cos(x)+b$ $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = -a\sin(x)$ donc y est solution de (E) si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}, -a\sin(x)+\sin(x)\frac{a\cos x+b}{2-\cos(x)} = 2\sin x$ donc si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $-a\sin(x)(2-\cos(x))+a\sin(x)\cos(x)+b\sin(x) = 2\sin(x)(2-\cos(x))$ donc si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(4+2a-b)\sin(x)-(2+2a)\cos(x)\sin(x) = 0$ Donc il suffit de prendre

$$\begin{cases} 4+2a-b=0 \\ 2+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

donc une solution particulière de (E) est $x \mapsto -\cos(x)+2$ donc les solutions de (E) étant somme d'une solution générale de (H) et une solution particulière de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto 2-\cos(x)+\frac{\lambda}{2-\cos x}$ où λ est un réel quelconque.

12. h est de la forme $x \mapsto 2-\cos(x)+\frac{\lambda}{2-\cos x}$ et $h(0)=1$ donc $1+\frac{\lambda}{2-1}=1$ donc $\lambda=0$ donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2-\cos(x)$.

Etude d'une courbe polaire.

13. Soit θ un réel

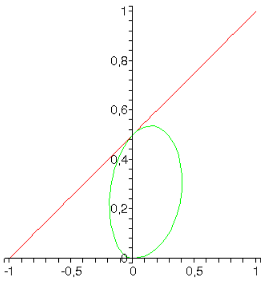
$\overrightarrow{OM}(-\theta) = f_0(-\theta)\vec{u}_\theta = -f_0(\theta)(\cos(-\theta)\vec{i}+\sin(-\theta)\vec{j}) = -f_0(\theta)\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)f_0(\theta)\vec{j}$ donc

$M(-\theta) = S_{oy}(M(\theta))$ donc on a une symétrie par rapport à l'axe des (Oy)

14. $f_0(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{OM}(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{2})\vec{i}+\sin(\frac{\pi}{2})\vec{j}\,]=\frac{1}{2}\vec{j}$ La tangente T en $M(\frac{\pi}{2})$ est dirigé par le vecteur $f'_0(\frac{\pi}{2})(\cos(\frac{\pi}{2})\vec{i}+\sin\frac{\pi}{2}\vec{j})+f_0(\frac{\pi}{2})(-\sin(\frac{\pi}{2})\vec{i}+\cos(\frac{\pi}{2})\vec{j})=-\frac{1}{4}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{i}$.

Donc on est amené à chercher l'équation de la droite passant par le point de coordonnées (0, $\frac{1}{2}$) et dirigé par le vecteur de coordonnées $\vec{u}$ $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$. Donc $P(x,y)$ appartient à T si et seulement si $\det(\overrightarrow{M(\frac{\pi}{2})P},\ \vec{u})=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}=0$ donc une équation de T est $-x+2y=1$.

15.



Etude la fonction $g: x\to\dfrac{\sin(x)}{x(2-\cos(x))}$

16. $g(x)$ est définie pour $x\neq 0$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

18. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$ donc $\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)$

$\dfrac{1}{2-\cos(x)}=\dfrac{1}{2-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ donc

$g(x)=(1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3))(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3))=1-\dfrac{2}{3}x^2+o(x^3)$

19. g admet un DL d'ordre 3 donc un Dl d'ordre 1 donc est dérivable en 0 et $g'(0)$=0.

20. g est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ car sa dérivée est strictement négative et comme elle est continue elle est bijective entre $[0,\pi]$ et $g([0,\pi])=[g(\pi), g(0)]=[0,1]$.

Etude d'une suite qui annule f_n

21. Si a vérifie $f_n(a)(a)$=0 alors $a=nf_0(a)$ donc $a=|a|=n|f_0(a)|\leq n\sqrt{3}$ car : $\forall x\in\mathbb{R}\ |f_0(x)|\leq\sqrt{3}$.

22. $f_n(x_n)=0$ et $x_n\in]0,\pi]\Leftrightarrow f_0(x_n)=\dfrac{x_n}{n}$ et $x_n\in]0,\pi]\Leftrightarrow g(x_n)=\dfrac{1}{n}$ et $x_n\in]0,\pi]\Leftrightarrow x_n=h(\frac{1}{n})$.

23. Comme h est continue et que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=h(0)=1$.