

TD 12 - Corrige

12.1 Sous-espace vectoriel

Indications :

Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E , on dispose de plusieurs méthodes :

1. On montre qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.
2. On montre que c'est un espace engendré $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
3. On montre que c'est le noyau ou l'image d'une application linéaire (c.f. Chapitre 14)

Exo 1 : Méthode 1 : On montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Non vide La suite nulle vérifie $0 = 12 \cdot 0 - 36 \cdot 0$ donc F est non vide.

Stable par Comb.Lin. Pour $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La suite $w_n = u_n + \lambda v_n$ vérifie :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} \\ &= 12u_{n+1} - 36u_n + \lambda(12v_{n+1} - 36v_n) \\ &= 12(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) - 36(u_n + \lambda v_n) \\ &= 12w_{n+1} - 36w_n. \end{aligned}$$

Donc $(w_n)_{n \geq 0} \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

Méthode 2 : On montre que F est un espace engendré.

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in F$. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 12X + 36 = (X - 6)^2$.

Donc $u_n = (\lambda_1 n + \lambda_2)6^n = \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n$ en posant $a_n = n6^n$ et $b_n = 6^n$.

Ainsi $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}[(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}]$.

Exo 2 : Méthode 1 : On montre que F est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Non vide La fonction nulle vérifie $0'' + 4 \cdot 0' + 5 \cdot 0 = 0$ donc F est non vide.

Stable par Comb.Lin. Pour $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La fonction $y = y_1 + \lambda y_2$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et vérifie :

$$\begin{aligned} y'' &= y_1'' + \lambda y_2'' \\ &= -4y_1' - 5y_1 + \lambda(-4y_2' - 5y_2) \\ &= -4(y_1' + \lambda y_2') - 5(y_1 + \lambda y_2) \\ &= -4y' - 5y \end{aligned}$$

Donc $y \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

Méthode 2 : On montre que F est un espace engendré.

Soit $y \in F$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Le polynôme caractéristique est $X^2 + 4X + 5 = (X + 2)^2 + 1^2$.

On pose $y_1(t) = e^{-2t} \cos t$ et $y_2(t) = e^{-2t} \sin t$ les solutions homogènes génératrices.

Donc $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ puis $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(y_1, y_2)$.

Exo 3 : Non vide La matrice nulle vérifie $A0 = 0 = 0A$. Donc E est non vide.

Stable par Comb.Lin. Pour $M_1, M_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $M = M_1 + \lambda M_2$.

On a $AM = A(M_1 + \lambda M_2) = AM_1 + \lambda AM_2 = M_1 A + \lambda M_2 A = (M_1 + \lambda M_2)A = MA$.

Donc $M \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Ainsi E est un \mathbb{R} -ev en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exo 4 : a) Non car $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^3$ sont croissantes donc monotone mais $f = f_2 - f_1$ n'est pas monotone car sa dérivée $f'(x) = 3x^2 - 1$ change de signe.

b) Oui car on peut vérifier les deux conditions :

Non vide : La fonction nulle s'annule en 0.

Stable par Comb.Lin. : Pour deux fonctions f_1 et f_2 qui s'annule en 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $(f_1 + \lambda f_2)(0) = f_1(0) + \lambda f_2(0) = 0$.

Ainsi la combinaison linéaire s'annule bien en 0.

12.1 Sous-espace vectoriel

- c) Non car $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto (x+1)^2$ s'annulent (en 0 et en 1 respectivement) pourtant $f_1 + f_2$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
- d) Oui car on peut vérifier les deux conditions :
Non vide : La fonction nulle est impaire.
Stable par Comb.Lin. : Soit f_1 et f_2 impaires et $\lambda \in \mathbb{R}$, on étudie $g = f_1 + \lambda f_2$.
 Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $g(-t) = f_1(-t) + \lambda f_2(-t) = -f_1(t) - \lambda f_2(t) = -g(t)$.
 Ainsi la combinaison linéaire g est une fonction impaire.

Exo 5 : Non vide La partie Δ est non-vide car la fonction nulle s'écrit $0 = f - f$ pour $f \in \mathcal{C}$.

Stable par Comb.Lin. Pour $h_1, h_2 \in \Delta$, ils existent $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{C}$ telles que $h_1 = f_1 - g_1$ et $h_2 = f_2 - g_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.

1er cas : $\lambda \geq 0$: On a $h_1 + \lambda h_2 = (f_1 + \lambda f_2) - (g_1 + \lambda g_2) \in \Delta$
 car $f_1 + \lambda f_2$ et $g_1 + \lambda g_2$ sont des fonctions croissantes.

2eme cas : $\lambda \leq 0$: On a $h_1 + \lambda h_2 = (f_1 - \lambda g_2) - (g_1 - \lambda f_2) \in \Delta$
 car $f_1 + (-\lambda)g_2$ et $g_1 + (-\lambda)f_2$ sont des fonctions croissantes.

Dans tous les cas, $h_1 + \lambda h_2 \in \Delta$.

Donc Δ est un sous-espace vectoriel de E .

Exo 6 : On raisonne par double implication.

(\Leftarrow) On suppose par l'absurde que $F \cup G$ est un espace vectoriel, que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F . Donc ils existent $u_F \in F \setminus G$ et $u_G \in G \setminus F$.

On a alors $u_F, u_G \in (F \cup G)$ donc $s = u_F + u_G \in (F \cup G)$ car $(F \cup G)$ est stable par Comb.Lin.

1er cas : $s \in F$ alors $u_G = s - u_F \in F$ car F est stable par Comb.Lin. Absurde car $u_G \notin F$.

2eme cas : $s \in G$ de même $u_F = s - u_G \in G$ car G stable par Comb.Lin. Absurde car $u_F \notin G$.

(\Rightarrow) On suppose que $F \subset G$ ou que $G \subset F$.

1er cas : $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est espace vectoriel par hypothèse.

2eme cas : $G \subset F$ alors de même $F \cup G = F$ est espace vectoriel.

Exo 7 : On doit montrer que $F = E \times E$ est un \mathbb{C} -ev par définition.

On note $0_F = (0, 0)$ l'élément neutre et les règles sur l'addition sur les règles usuelles.

Pour le produit externe, on a :

éléments neutres $0_{\mathbb{C}} \cdot (x, y) = (0, 0) = 0_F$

et $1_{\mathbb{C}} \cdot (x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + 0 \cdot x) = (x, y)$.

associatif $(a + ib) \cdot [(c + id) \cdot (x, y)]$

$= (a + ib) \cdot (c \cdot x - d \cdot y, c \cdot y + d \cdot x)$

$= (a \cdot (c \cdot x - d \cdot y) - b \cdot (c \cdot y + d \cdot x), a \cdot (c \cdot y + d \cdot x) + b \cdot (c \cdot x - d \cdot y))$

$= ((ac - bd) \cdot x - (ad + bc) \cdot y, (ac - bd) \cdot y + (ad + bc) \cdot x)$

$= ((ac - bd) + i(ad - bc)) \cdot (x, y)$.

On retrouve bien l'associativité car $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad - bc)$.

double distributif $((a + ib) + (c + id)) \cdot (x, y)$

$= ((a + c) \cdot x - (b + d) \cdot y, (a + c) \cdot y + (b + d) \cdot x)$

$= ((a \cdot x - b \cdot y) + (c \cdot x - d \cdot y), (a \cdot y + b \cdot x) + (c \cdot y + d \cdot x))$

$= (a + ib) \cdot (x, y) + (c + id) \cdot (x, y)$.

Et $(a + ib) \cdot (x_1, y_1) + (a + ib) \cdot (x_2, y_2)$

$= (a \cdot x_1 - b \cdot y_1, a \cdot y_1 + b \cdot x_1) + (a \cdot x_2 - b \cdot y_2, a \cdot y_2 + b \cdot x_2)$

$= (a \cdot x_1 - b \cdot y_1 + a \cdot x_2 - b \cdot y_2, a \cdot y_1 + b \cdot x_1 + a \cdot y_2 + b \cdot x_2)$

$= (a \cdot (x_1 + x_2) - b \cdot (y_1 + y_2), a \cdot (y_1 + y_2) + b \cdot (x_1 + x_2))$

$= (a + ib) \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Donc F est bien est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Exo 8 : On sait que \mathbb{C} est un \mathbb{R} -ev. Montrons que $\mathbb{R}.\omega \subset \mathbb{C}$ est bien un ss- \mathbb{R} -ev de \mathbb{C} .

Non vide car $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}}.\omega \in \mathbb{R}.\omega$.

Stable par Comb.Lin. Pour $u, v \in \mathbb{R}.\omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut écrire $u = x.\omega$ et $v = y.\omega$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Donc $u + \lambda v = (x + \lambda y).\omega \in \mathbb{R}.\omega$.

Pour que $\mathbb{R}.\omega$ soit un \mathbb{C} -espace vectoriel il faut $i.\omega \in \mathbb{R}.\omega$ uniquement possible ssi $\omega = 0$.

Donc $\mathbb{R}.\omega = \{0\}$ est le seul \mathbb{C} -ev sous-espace strict de \mathbb{C} .

12.2 Espaces supplémentaires

Indications :

Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$, on peut montrer par définition que tout vecteur $u \in E$ se décompose de manière unique en somme deux vecteurs $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$.

Dans la pratique, on décompose plutôt le raisonnement en deux étapes en montrant que

$$\boxed{F_1 \cap F_2 = \{0_E\}} \text{ et } \boxed{F_1 + F_2 = E}.$$

Dans tous les cas, il faut commencer par démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E comme dans les exercices précédents.

Exo 9 : Sous-espaces : D est un espace vectoriel en tant qu'espace engendré.

On a $P = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ est un espace vectoriel en tant qu'espace engendré.

$P \cap D \subset \{0_3\}$: Soit $u \in P \cap D$. On a $u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ car $u \in D$. Puis $\lambda - 2\lambda + 2\lambda = 0$ car $u \in P$. Ainsi $\lambda = 0$ puis $u = 0_3$ est le vecteur nul.

$P + D \supset \mathbb{R}^3$: Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On recherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in P$.

On trouve l'équation $(a - \lambda) - (b - 2\lambda) + (c - 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a - b + c$.

Donc $u = (u - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}) + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in P + D$.

Ainsi $P \oplus D = \mathbb{R}^3$ i.e. ils sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exo 10 : Sous-espaces : L'espace G est un espace vectoriel de référence.

L'espace F est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$.

Non vide Le polynôme nul s'annule en 1 et 2 donc $0 \in F$.

Stable par Comb.Lin. Pour $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(P_1 + \lambda P_2)(1) = P_1(1) + \lambda P_2(1) = 0$ et $(P_1 + \lambda P_2)(2) = P_1(2) + \lambda P_2(2) = 0$. Donc $P_1 + \lambda P_2 \in F$.

$F \cap G \subset \{0\}$: Soit $P(X) \in F \cap G$. On a $P(X) = (X - 1)(X - 2)Q(X)$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ car $(X - 1)$ et $(X - 2)$ divise P et sont premiers entre eux. Puis $\deg(P) = 2 + \deg Q \leq 1$ impose $Q(X) = 0$. Donc $P(X) = 0$.

$F + G \supset \mathbb{R}[X]$: Pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, on peut faire la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$.

On obtient $P(X) = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < 2$.

Ainsi $P(X) \in F + G$ car $(X^2 - 3X + 2)Q(X) \in F$ et $R(X) \in G$.

Donc $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$ i.e. ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exo 11 : Sous-espaces : On montre que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Non vide La fonction nulle est bien dans F .

Stable par Comb.Lin. Pour $f_1, f_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f = f_1 + \lambda f_2$.

On a : $f(0) = f_1(0) + \lambda f_2(0) = 0$ et $f'(0) = f_1'(0) + \lambda f_2'(0) = 0$. Donc $f \in F$.

Puis $G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ est un espace engendré.

$F \cap G \subset \{0\}$: Soit $f \in F \cap G$.

On sait qu'ils existent $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = at + b$ car $f \in G$.

Puis $0 = f(0) = b$ et $0 = f'(0) = a$ car $f \in F$. Donc f est bien la fonction nulle.

$F + G \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $a = h'(0)$ et $b = h(0)$ puis $f(t) = h(t) - at - b$ et $g(t) = at + b$.

On a bien $g \in G$ puis $f(0) = b - b = 0 = a - a = f'(0)$ d'où $f \in F$. Ainsi $h = f + g \in F + G$.

Conclusion : On a ainsi démontré que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exo 12 : Sous-espaces : $D = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u)$ est bien un espace vectoriel en tant qu'espace engendré.

Non vide Le vecteur nul est bien dans H par la condition $0 + \dots + 0 = 0$.

Stable par Comb.Lin. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note :

$$z = x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n)$$

On a $\sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \lambda \sum_{i=1}^n y_i = 0$ i.e. $z \in H$,

car $x \in H$ donc $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ et de même $y \in H$ donc $\sum_{i=1}^n y_i = 0$.

$H \cap D \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$: Soit $x \in H \cap D$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u = (\lambda, \dots, \lambda)$ car $x \in D$.

Puis $x \in H$ donc $\lambda + \dots + \lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ puis $x = 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

$\mathbb{R}^n \subset H + D$: Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On recherche $h = (h_1, \dots, h_n) \in H$ et $d = (\lambda, \dots, \lambda) \in D$ tel que $x = h + d$. Par analyse-synthèse, il faut $x_i = h_i + \lambda$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 0$. Donc $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (h_i + \lambda) = 0 + n\lambda$.

On pose $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $h = (h_1 - \lambda, \dots, h_n - \lambda)$. On a bien $x = h + d \in H + D$.

Conclusion : $\mathbb{R}^n = H \oplus D$.

Exo 13 : 1) On démontre que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ en passant aux éléments.

Soit $u \in E$. On a :

$$u \in \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$$

$$\Leftrightarrow \exists u_A \in \text{Vect}(A), u_B \in \text{Vect}(B), u = u_A + u_B$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda_a)_{a \in A} \in \mathbb{R}^A, (\mu_b)_{b \in B} \in \mathbb{R}^B, u = \sum_{a \in A} \lambda_a a + \sum_{b \in B} \mu_b b$$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha_v)_{v \in A \cup B} \in \mathbb{R}^{A \cup B}, u = \sum_{v \in A \cup B} \alpha_v v \quad \text{en posant } \alpha_v = \begin{cases} \lambda_v & \text{si } v \in A \\ \mu_v & \text{si } v \in B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u \in \text{Vect}(A \cup B).$$

2) On a $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$. En passant aux éléments, on considère $u \in \text{Vect}(A \cap B)$ donc $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ pour $x_i \in A \cap B$. Mais en particulier $x_i \in A$ donc $u \in \text{Vect}(A)$ et de même $x_i \in B$ donc $u \in \text{Vect}(B)$.

Ainsi $u \in \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

L'inclusion réciproque est fautive. Par exemple si $A = \{u\}$ et $B = \{-u\}$ alors $A \cap B = \emptyset$ donc $\text{Vect}(A \cap B) = \{0_E\}$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) = \text{Vect}(u)$.

Remarque : $\boxed{\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}}$ car la somme vide $\sum_{a \in \emptyset} a = 0_E$ est l'élément neutre.

Exo 14 : L'hypothèse de l'énoncé s'écrit $G = (F \cap G) \oplus H$.

$F \cap H \subset \{0_E\}$: Soit $u \in F \cap H$ alors $u \in H \subset G$ donc $u \in F \cap G$.

Ainsi $u \in (F \cap G) \cap H = \{0_E\}$ car $F \cap G$ et H sont en somme directe.

$F + G \subset F + H$: Soit $u = u_F + u_G \in F + G$. On a $u_G \in G = (F \cap G) \oplus H$.

Donc $u_G = u_0 + u_H$ avec $u_0 \in F \cap H$ et $u_H \in H$.

Puis $u = u_F + u_0 + u_H \in F + H$ car $(u_F + u_0) \in F$ et $u_H \in H$.

Ainsi $F + G = F \oplus H$.

12.3 Famille de vecteurs

Exo 15 : On recherche l'existence de $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda_1 x + \lambda_2 y$.

On obtient le système d'équation $\begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = 1 \\ \lambda_1 + a\lambda_2 & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = 2 \\ a\lambda_2 & = 1 \end{cases}$. Ce système est compatible ssi $a = \frac{1}{2}$ et dans ce cas l'unique solution est $u = x + 2y$.

12.3 Famille de vecteurs

Les vecteurs sont alors coplanaires mais deux à deux non colinéaires. Les espaces valent tous $P = \text{Vect}(x, y, u)$.

On a $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, y, x + 2y) = P$.

Puis $\text{Vect}(x, u) = \text{Vect}(x, u, \frac{1}{2}(u - x)) = P$.

Et $\text{Vect}(y, u) = \text{Vect}(y, u, u - 2y) = P$.

Exo 16 : a) Les vecteurs sont non colinéaires donc ils forment une famille libre.

b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$.

$$\text{On a } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène, échelonné et de rang 3. Donc il admet une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Par définition la famille est libre.

c) On observe $x_1 + x_3 = x_2$ donc la famille est liée par la relation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

d) On observe que $x_1 = -x_3$ ces deux vecteurs sont colinéaires. Donc la famille est liée par la relation $x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$.

Exo 17 : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i = 0$ la fct nulle.

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \cos t + \lambda_2 t \cos t + \lambda_3 \sin t + \lambda_4 t \sin t = 0$.

Donc on peut en déduire un système de 4 équations pour des valeurs particulières t :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 & (t = 0) \\ \lambda_1 + 2\pi\lambda_2 & = 0 & (t = 2\pi) \\ \lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 & = 0 & (t = \pi/2) \\ -\lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 & = 0 & (t = -\pi/2) \end{cases}$$

On trouve donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et donc la famille est libre.

Exo 18 : On démontre par l'absurde que la famille est libre. Sinon ils existent des coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i = 0$. Puis on note i_0 le plus grand des indices tels que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On en déduit $\lambda_{i_0} f_{i_0} = -\sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i f_i$.

Or pour $t \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lambda_{i_0} e^{i_0 t} = -\sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i e^{it} =_{t \rightarrow +\infty} o(e^{i_0 t})$ car $i < i_0$ donc $e^{it} =_{t \rightarrow +\infty} o(e^{i_0 t})$. On obtient $\lambda_{i_0} e^{i_0 t} =_{t \rightarrow +\infty} o(e^{i_0 t})$ ce qui est absurde. Donc la famille n'est pas liée, elle est donc libre.

Remarque : Ceci démontre l'existence d'autant de directions que possible dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un espace de dimension infinie.

Exo 19 : Attention : Il est FAUX de penser que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ne peut donc pas utiliser le caractère échelonné des polynômes.

On peut par contre adapter la démonstration de l'exercice précédent en utilisant la comparaison : $x^a =_{x \rightarrow 0} o(x^b) \Leftrightarrow a > b$.

Par l'absurde, on considère une relation de liaison $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i = 0$ avec $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ non tous nuls. On note p le plus petit indice tel que $\lambda_p \neq 0$ (i.e. la valuation) alors pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) \sim_{x \rightarrow 0} \lambda_p x^p$. On obtient $0 \sim_{x \rightarrow 0} \lambda_p x^p$ ce qui est absurde.