TD 11 - Corrigé

11.1 Recherche d'équivalent

Exo 1 : **a)** On a $n^4+3n^2-5 \sim_{+\infty} n^4$ car $1 =_{+\infty} o(n^4)$ et $n^2 =_{+\infty} o(n^4)$.

b) On a $3^n - n^3 + 10 \sim_{+\infty} 3^n$ car $1 =_{+\infty} o(3^n)$ et $n^3 =_{+\infty} o(3^n)$

c) On a $\ln^n(n) + 3^n - n^9 \sim_{+\infty} \ln^n(n)$ car $n^9 =_{+\infty} o(3^n)$ et $3^n =_{+\infty} o(\ln^n(n))$.
En effet $\dfrac{\ln^n(n)}{3^n} = \left(\dfrac{\ln(n)}{3}\right)^n \geq 2^n \to +\infty$ pour $n \geq e^6$.

d) On a $\dfrac{3^n+2^nn^2}{\ln^2(n)-n^2} \sim_{+\infty} \dfrac{3^n}{-n^2}$.
Car $\dfrac{2^nn^2}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n n^2 \to 0$ donc $2^nn^2 =_{+\infty} o(3^n)$.
Et $\ln^2(n) =_{+\infty} o(n^2)$.

e) On a $\ln(1+n)\ln(1+\dfrac{1}{n}) \sim_{+\infty} \ln(n)\dfrac{1}{n} = \dfrac{\ln n}{n}$. Car $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$.

f) On a $\sqrt{4n+1} - 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}((1+1/(4n))^{1/2}-1)$
$=_{+\infty} 2\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{4n}$
Et $\sqrt{(n+1)^3} - n\sqrt{n} = n^{3/2}\left((1+1/n)^{3/2}-1\right)$
$=_{+\infty} n^{3/2}\left((1+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} \dfrac{3}{2}n^{1/2}$.
Donc $\dfrac{\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3}-n\sqrt{n}} \sim_{+\infty} \dfrac{n^{-1/2}/4}{3n^{1/2}/2} = \dfrac{1}{6n}$.

g) On a $1 + a^n + n^\alpha \sim_{+\infty} \begin{cases} a^n \text{ si } a > 1 \\ n^\alpha \text{ si } a \leq 1 \end{cases}$
Et $\ln^\beta + n^\alpha \sim_{+\infty} n^\alpha$ car $\alpha > 0$.
Donc $\dfrac{1+a^n+n^\alpha}{\ln^\beta n + n^\alpha} \sim_{+\infty} \begin{cases} \dfrac{a^n}{n^\alpha} \text{ si } a > 1 \\ 1 \text{ si } a \leq 1 \end{cases}$.

h) On a $\sqrt{n^4+3n} - n^2 = n^2\left((1+3/n^3)^{1/2} - 1\right)$
$= n^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{6n}$.

i) On a $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ et $1 - e^x \sim_{x\to 0} -x$.
Donc $1 - e^{2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =_{+\infty} 1 - e^{2/n+o(1/n)} \sim_{+\infty} \dfrac{-2}{n}$

j) On a $\ln\left(n+\dfrac{1}{n^5}\right) - \ln n = \ln n + \ln(1+n^{-6}) - \ln n = \ln(1+n^{-6}) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^6}$

k) On a $\sin\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1 - \cos\dfrac{1}{n}$ car $\sin x \sim_{x\to 0} x$.
Puis $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$ donc $1 - \cos\dfrac{1}{n} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2n^2}$.

l) On note $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$. On a $\ln(\cos\dfrac{1}{n}) + \cos(\tan\dfrac{2}{n}) - 1 = \ln(\cos x_n) + \cos(\tan(2x_n)) - 1$
$=_{x_n\to 0} \ln(1 - x_n^2/2 + o(x_n^3)) + \cos(2x_n + o(x_n^2)) - 1$
$=_{x_n\to 0} -x_n^2/2 + o(x_n^3)) + 1 - (2x_n)^2/2 + o(x_n^2)) - 1 \sim_{x_n\to 0} -\dfrac{5}{2}x_n =_{+\infty} -\dfrac{5}{2n}$.

m) On a $\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right) \sim_{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2n^2}$.

Exo 2 : On a $e^{u_n} - e^{v_n} = e^{v_n}(e^{u_n - v_n} - 1) \sim e^0(u_n - v_n)$ car $v_n \to 0$ et $(u_n - v_n) \to 0$.

11.2 Recherche d'équivalent de suite autonome

Exo 3 : **a)** On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$. Donc la suite est croissante.

En posant $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$ croissante sur $]0,1[$. On trouve $f(]0,1[) =]f(0), f(1)[=]1/2, 1[$. Donc l'intervalle est stable par f et par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.
D'après le théorème de la limite monotone, la suite est croissante et majorée. Donc elle converge vers $l \in]0,1]$ un point fixe. Puis $f(l) = l$ ssi $l = 1$.

b) On note $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{2}{u_n^2 - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$
$= \dfrac{2 - (u_n + 1)}{(u_n - 1)(u_n + 1)} = \dfrac{-1}{u_n + 1} \to \dfrac{-1}{2}$.

c) D'après le Lemme de Cesàro $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{n \to +\infty} -n/2$.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_0 - 1} \sim_{+\infty} \frac{1}{u_n - 1}$ par télescopage.

Donc $u_n - 1 \sim \dfrac{-2}{n}$. C'est à dire $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exo 4 : **a)** Pour $n \geq 1$, on écrit $n = k+1$. On a $u_{k+1} - 2 = \dfrac{u_k^2 - 2u_k + 1}{u_k} = \dfrac{(u_k - 1)^2}{u_k} \geq 0$.
Donc $u_n = u_{k+1} \geq 2 > 1$.

b) On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est croissante.

c) On suppose par l'absurde que u_n est majorée alors elle admet une limite finie $l \geq 1$ tel que $l = l + 1/l$ donc $1/l = 0$ est absurde. Puis la suite est croissante et non majorée donc $u_n \to +\infty$.

d) On a $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n + 1/u_n)^2 - u_n^2 = 2 + 1/u_n^2 \to 2$ car $1/u_n^2 \to 0$.

e) D'après le lemme de Cesàro $u_n^2 = u_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{+\infty} u_0 + 2n \sim 2n$.

Donc $u_n \sim_{+\infty} \sqrt{2n}$.

Exo 5 : **a)** On a $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} \geq 0$. Donc la suite est croissante. Si il est majorée alors elle tend vers $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = l + e^{-l}$. Or $e^{-l} = 0$ est absurde. Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et non majorée. Puis $u_n \to +\infty$.

b) On note $v_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n}\left(\exp(u_{n+1} - u_n) - 1\right)$
$= e^{u_n}\left(\exp(e^{-u_n}) - 1\right) = e^{u_n}\left(1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n}) - 1\right)$ car $e^{-u_n} \to 0$.
$= 1 + o(1) \to 1$.

c) On en déduit $e^{u_n} = e^{u_0} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim e^{u_0} + 1.n \sim n = n + o(n)$.

Donc $u_n = \ln(e^{u_n}) = \ln(n + o(n)) = \ln(n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(n) + o(1) \sim \ln(n)$.

Exo 6 : **a)** On a $u_1 = \sin(u_0) \in]0,1]$ qui est un intervalle stable par sin.
Donc pour tout $n \geq 1, u_n \in]0,1]$.
On note $g(x) = \sin x - x$ dérivable sur $]0,1]$ avec $g'(x) = \cos x - 1 < 0$.
Ainsi g est décroissante et $g(x) < g(0) = 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ pour $n \geq 1$ et la suite est décroissante.
Elle converge vers un point fixe tel que $g(l) = l$ et $l \in [0,1]$ donc $l = 0$.

b) On a $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = u_n - u_n^3/6 + o(u_n^4) - u_n \sim \dfrac{-u_n^3}{6}$.

c) On a $v_n = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} \sim \dfrac{(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)}{u_n^4}$ car $u_{n+1} \sim u_n$
$\sim \dfrac{(-u_n^3/6)(2u_n)}{u_n^4} = -\dfrac{1}{3}$.
Donc $v_n \to -\dfrac{1}{3}$.

d) On a $\dfrac{1}{u_n^2} = \dfrac{1}{u_0^2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \dfrac{n}{3}$. Donc $u_n \sim \sqrt{3/n}$.

11.3 Développement limité

Exo 7 : **a)** On a $\exp(\sin x) = \exp(x - x^3/6 + o(x^3))$
$=_{x\to 0} 1 + (x - x^3/6) + (x - x^3/6)^2/2 + (x - x^3/6)^3/6 + o(x^3)$
$=_{x\to 0} 1 + x + x^2/2 + o(x^3)$

b) On a $\ln(\cos x) = \ln(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))$
$=_{x\to 0} -(x^2/2 - x^4/24) - (x^2/2)^2/2 + o(x^4)$
$=_{x\to 0} -x^2/2 - x^4/12 + o(x^4)$

c) On a $\dfrac{1}{1 - x^2 - x^3}$
$=_{x\to 0} 1 + (x^2 + x^3) + (x^2 + x^3)^2 + o(x^5)$
$=_{x\to 0} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + o(x^5)$

d) On a $(1 + x)^x = \exp(x \ln(1 + x))$
$=_{x\to 0} \exp[x(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)]$
$=_{x\to 0} 1 + [x^2 - x^3/2 + x^4/3] + [x^2]^2/2 + o(x^4)$
$=_{x\to 0} 1 + x^2 - x^3/25x^4/6 + o(x^4)$

e) $\ln\left[\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right]$
$= \ln(1 + \tan x) - \ln(1 - \tan x) = f(x) - f(-x)$.
On a $f(x) = \ln(1 + \tan x) =_{x\to 0} \ln(1 + x + x^3/3 + o(x^4))$
$=_{x\to 0} (x + x^3/3) - (x + x^3/3)^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$
$=_{x\to 0} x - x^2/2 + 2x^3/3 - 7x^4/12 + o(x^4)$
Donc $f(x) - f(-x) =_{x\to 0} 2x + 4x^3/3 + o(x^3)$.

f) On pose $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1 + x}{1 + 2x}\right)$ de classe C^∞ au voisinage de 0.
On a $f'(x) = \dfrac{[(1 + 2x) - 2(1 + x)]/(1 + 2x)^2}{1 + (1 + x)^2/(1 + 2x)^2}$
$= \dfrac{-1}{(1 + 2x)^2 + (1 + x)^2} = \dfrac{-1}{2 + 6x + 5x^2}$
$= \dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{1 + 3x + 5x^2/2}$
$=_{x\to 0} \dfrac{-1}{2}(1 - (3x + 5x^2/2) + (3x)^2 + o(x^2))$
$=_{x\to 0} (-1/2) + (3/2)x - (13/4)x^2 + o(x^2)$
Donc en primitivant $f(x) =_{x\to 0} f(0) - x/2 + 3x^2/4 - 13x^3/12 + o(x^2)$
avec $f(0) = \text{Arctan}\,(1) = \pi/4$.

Exo 8 : **a)** On a $x^a \ln x \to_{x\to 0} 0$ et $x^2 - 1 \to_{x\to 0} -1$ donc $\lim\limits_0 f_a = 0$ et la fonction se prolonge par continuité en 0.

On note $x = 1 + h$ au voisinage de 1. On a $f_a(1 + h) = \dfrac{(1 + h)^a \ln(1 + h)}{(1 + h)^2 - 1}$

$= \dfrac{(1+ah+o(h))(h-h^2/2+o(h^2))}{2h+h^2} = \dfrac{h(1+(a-1/2)h+o(h))}{2h(1+h/2)} \to \dfrac{1}{2}$.
Donc la fonction se prolonge par continuité en 1.

b) Le développement limité en 1 donne :
$f(1+h) =_{h\to 0} \dfrac{1}{2}(1+(a-1/2)h+o(h))(1-h/2+o(h)) = \dfrac{1}{2}(1+(a-1)h+o(h))$.
Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{a-1}{2}$.
La définition de la dérivabilité en 0 donne :
$\dfrac{f_a(x)-f_a(0)}{x-0} = \dfrac{x^{a-1}\ln x}{x^2-1} \to \begin{cases} 0 \text{ si } a-1>0 \\ +\infty \text{ si } a-1 \leq 0 \end{cases}$.
Donc f_a est dérivable en 0 ssi $a>1$.

Exo 9 : **a)** On réalise le développement limité de $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$:
$\dfrac{\sin x}{2+\cos x} =_{x\to 0} \dfrac{x-x^3/6+x^5/120+o(x^6)}{2+1-x^2/2+x^4/24+o(x^5)}$
$=_{x\to 0} \dfrac{x}{3}(1-x^2/6+x^4/120+o(x^5))\dfrac{1}{1-(x^2/6-x^4/72+o(x^5))}$
$=_{x\to 0} \dfrac{x}{3}(1-x^2/6+x^4/120+o(x^5))(1+(x^2/6-x^4/72)+(x^2/6)^2+o(x^5))$
$=_{x\to 0} \dfrac{x}{3}(1+(1/120-1/72+1/36-1/36)x^4+o(x^4))$
$=_{x\to 0} \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^5}{540} + o(x^5)$.
Donc $\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)} - \dfrac{x}{3} \sim -\dfrac{x^5}{540}$

b) On a $(\operatorname{Arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} =_{x\to 0} 1 - \dfrac{1}{2}(-x^2) + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^5)$
Donc $\operatorname{Arcsin} x = 0 + x + x^3/6 + 3x^5/40 + o(x^6)$
Et $\tan\tan x =_{x\to 0} \tan(x+x^3/3+o(x^4))$
$=_{x\to 0} (x+x^3/3)+(x)^3/3+o(x^4) =_{x\to 0} x+2x^3/3+o(x^4)$.
Donc $\tan(\tan x) - \operatorname{Arcsin} x =_{x\to 0} 2x^3/3 - x^3/6 + o(x^4)$
$\sim_{x\to 0} x^3/2$.

c) On a $x^3\sqrt[3]{x-1}+x^3 = x^3(1-(1-x)^{1/3}) =_{x\to 0} x^3(1-(1-x/3+o(x)))$
$\sim_{x\to 0} x^4/3$.

Exo 10 : **a)** On a $x - \sin x =_{x\to 0} x-(x-x^3/6+o(x^3)) \sim_{x\to 0} x^3/6$.
Et $\operatorname{sh}^3 x \sim_{x\to 0} x^3$.
Donc $\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{sh}^3 x} \sim_{x\to 0} \dfrac{x^3/6}{x^3} \to \dfrac{1}{6}$

b) On pose $x = \dfrac{1}{h}$ pour $h \to 0^+$.
On a $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - ex^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
$= \dfrac{1}{h}(1+h)^{1/h} - \dfrac{e}{h^2}\ln(1+h)$
$=_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\exp\left[\dfrac{1}{h}\ln(1+h)\right] - \dfrac{e}{h^2}(h-h^2/2+o(h^2))$
$=_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\exp(1-h/2+o(h)) - \dfrac{e}{h} + \dfrac{e}{2} + o(1)$
$=_{h\to 0} \dfrac{e(1-h/2+o(h))}{h} - \dfrac{e}{h} + \dfrac{e}{2} + o(1) = o(1)$.
Donc $f(x) \to_{x\to+\infty} 0$.

c) On pose $x = \pi/2 + h$ avec $h \to 0$.

On a $g(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\ln \sin x}$
$= \dfrac{2}{\sin^2 h} + \dfrac{1}{\ln \cos h}$
$= \dfrac{2\ln\cos h - \sin^2 h}{\sin^2 h \ln \cos h}$.
Or $\ln\cos h =_{h\to 0} \ln(1 - h^2/2 + h^4/24 + o(h^4))$
$=_{h\to 0} (h^2/2 - h^4/24) + (h^2/2)^2 + o(h^4)$
$=_{h\to 0} h^2/2 + 5h^4/24 + o(h^4)$
Et $\sin^2 h =_{h\to 0} \left(h - h^3/6 + o(h^3)\right)^2$
$= h^2 - h^4/3 + o(h^4)$.
Donc $2\ln\cos h - \sin^2 h \sim_{h\to 0} 3/4h^4$
puis $g(\pi/2 + h) \sim_{h\to 0} \dfrac{3h^4/4}{h^2h^2/2} \to \dfrac{3}{2}$.

11.4 Avec recherche d'idées

Exo 11 : **a)** On a $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$.
En partant de $\tan x =_{x\to 0} x + x^3/3 + 2x^5/15 + o(x^6)$, on en déduit :
$\tan'(x) =_{x\to 0} 1 + (x + x^3/3 + 2x^5/15)^2 + o(x^6)$
$=_{x\to 0} 1 + x^2 + 2x^4/3 + (1/9 + 4/15)x^6 + o(x^6)$.
Puis en primitivant on trouve :
$\tan x =_{x\to 0} x + x^3/3 + 2x^5/15 + 11x^7/315 + o(x^7)$.

b) De même la formule $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$ et $\mathrm{th}\, x \sim_{x\to 0} x$.
On trouve $\mathrm{th}'(x) =_{x\to 0} 1 - x^2 + o(x^2)$
donc $\mathrm{th}(x) =_{x\to 0} x - x^3/3 + o(x^3)$.
En trois étapes on abouti à :
$\mathrm{th}(x) =_{x\to 0} x - x^3/3 + 2x^5/15 - 11x^7/315 + o(x^7)$.

Exo 12 : On réalise le développement limité de : $\dfrac{a + bx^2}{1 + cx^2}$
$=_{x\to 0} (a + bx^2)(1 - cx^2 + c^2x^4 - c^3x^6 + o(x^6))$
$=_{x\to 0} a + (b - ac)x^2 + (ac^2 - bc)x^4 + (bc^2 - ac^3)x^6 + o(x^6)$.
Donc l'ordre est maximal lorsque $\begin{cases} a & = 1 \\ b - ac & = -1/2 \\ ac^2 - bc & = 1/24 \end{cases}$
On obtient $a = 1, b = -5/12$ et $c = 1/2$.
Dans ce cas, $f(x) \sim_{x\to 0} (bc^2 - ac^3)x^6 = \dfrac{-x^6}{288}$.

Exo 13 : La fonction f est de classe C^∞ par opération sur $]-1, +\infty[$.
Pour $x > -1$, on a $f'(x) = (x + 1)e^x > 0$.
Donc f est strictement croissante et continue donc elle réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ vers $f(]-1, +\infty[) =]-1/e, +\infty[$.
De plus f est C^∞, f' ne s'annule pas et f est bijective.
Donc f^{-1} est C^∞ sur $]-1/e, +\infty[$.
On a $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$.
Puis $f(x) =_{x\to 0}= x + x^2 + o(x^2)$
et $f^{-1}(y) =_{y\to 0} 0 + ay + by^2 + o(y^2)$
doivent vérifier $f^{-1}(f(x)) = x$.
Donc $f^{-1}(f(x)) = a(x + x^2) + b(x + x^2) + o(x^2) = ax + (a + b)x^2 + o(x^2) = x$.
Par unicité du développement limité, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

Exo 14 : **a)** On a f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-(1-x)^2}{1+x^2} < 0$.
Donc f est continue et strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
En effet $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

b) On a $f(x) = \ln(1+x^2) - x =_{x\to 0} (x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)) - x$
$=_{x\to 0} -x + x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.

c) La fonction f est de classe C^∞ et f' ne s'annule pas au voisinage de 0 donc f^{-1} est également de classe C^∞ au voisinage de $f(0) = 0$. D'après la formule de Taylor-Young, il existe un DL $f^{-1}(y) =_{y\to 0} ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4)$.
On obtient $x = f^{-1}(f(x))$
$=_{x\to 0} a(-x + x^2 - x^4/2) + b(-x+x^2)^2 + c(-x+x^2)^3 + d(-x)^4 + o(x^4)$
$=_{x\to 0} -ax + (a+b)x^2 + (-c-2b)x^3 + (-a/2 + b + 3c + d)x^4 + o(x^4)$
Donc $a = -1$, $b = 1$, $c = -2$ et $d = \dfrac{9}{2}$.

Exo 15 : **a)** On a $f(x) = o(x^2)$ car $\dfrac{f(x)}{x^2} = x\sin(1/x) \to_{x\to 0} 0$. Donc f admet un $DL_2(0)$.
Si par l'absurde, f admet un $DL_3(0)$ alors $f(x) = cx^3 + o(x^3)$ car on peut le tronquer en $f(x) = 0 + o(x^2)$.
Donc $\dfrac{f(x)}{x^3} \to_{x\to 0} c$. Or $\dfrac{f(x)}{x^3} = \sin(1/x)$ n'admet pas de limite en 0. Absurde.

b) On a $f(x) =_{x\to 0}= 0 + 0x + o(x)$. Donc f se prolonge de classe C^1 en 0 avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

c) Soit $x \neq 0$. On a $f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x)$.
Donc $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x) \sim_{x\to 0} -\cos(1/x)$ n'admet pas de limite.
Donc f' n'est pas dérivable en 0.
Ainsi f n'est pas prolongeable de classe C^2 malgré l'existence d'un $DL_2(0)$.

11.5 Problèmes

Exo 16 : **a)** On a $\operatorname{Arctan}\sqrt{x} =_{x\to 0} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}(\sqrt{x})^{2k+1} + o(\sqrt{x}^{2n+2})$
$=_{x\to 0} \sqrt{x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^k + o(x^{n+1})$
Donc $f(x) =_{x\to 0} (1+x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^k + o(x^n)$ est un $DL_n(0)$.

b) A l'ordre 1 on trouve : $f(x) =_{x\to 0} (1+x)(1 - x/3) + o(x) = 1 + \dfrac{2}{3}x + o(x)$.
Donc f est prolongeable de classe C^1 en posant $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{2}{3}$.

c) On pose $g(x) = \dfrac{1+x^2}{x}\operatorname{Arctan}(x)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
On a $g'(x) = (\dfrac{-1}{x^2} + 1)\operatorname{Arctan}(x) + \dfrac{1+x^2}{x}\dfrac{1}{1+x^2}$
$= \dfrac{(x^2-1)\operatorname{Arctan}(x) + x}{x^2}$
$= \dfrac{x^2-1}{x^2}(\operatorname{Arctan}(x) + \dfrac{x}{x^2-1})$.

Puis on étudie $h(x) = \text{Arctan}\,(x) + \dfrac{x}{x^2-1}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
$h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{(x^2-1)-2x^2}{(x^2-1)^2}$
$= \dfrac{(x^4-2x^2+1)-(x^4+2x^2+1)}{(1+x^2)(x^2-1)^2}$
$= \dfrac{-4x^2}{(1+x^2)(x^2-1)^2} \leq 0.$
Donc h est décroissante avec $h(0) = 0, \lim\limits_{1^-} h = -\infty$, $\lim\limits_{1^+} h = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} h = \pi/2$.
Donc $h < 0$ sur $]0, 1[$ et $h > 0$ sur $]1, +\infty[$.
Puis $g' > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc g croissante.
Puis $f(x) = g(\sqrt{x})$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) On pose $h = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$.
On a $f(1/h^2) = \dfrac{1+(1/h)^2}{(1/h)}\text{Arctan}\,(1/h^2)$
$= \dfrac{1+h^2}{h}(\pi/2 - \text{Arctan}\,(h^2))$
$=_{h\to 0} (\dfrac{1}{h} + h)(\pi/2 + h + o(h))$
$=_{h\to 0} \dfrac{\pi}{2h} + 1 + \dfrac{\pi}{2}h + o(h).$
Donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{x} + 1 + \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}} + o(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$.

Exo 17 : **a)** f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f_n'(x) = e^x + 2x - n$ et $f_n''(x) = e^x + 2 > 0$.
Donc f_n' est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f_n'(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[$ en calculant les limites.
Donc il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n'(x_n) = 0$.
Pour $x < x_n, f_n'(x) < f_n'(x_n) = 0$ donc f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, x_n[$ et de de même f_n est strictement croissante sur $]x_n, +\infty$. Donc f_n atteint en x_n un minimum global égale à $\mu_n = f_n(x_n)$.

b) Puis $f_n'(\ln n) = e^{\ln n} + 2\ln n - n = 2\ln n > 0 = f_n'(x_n)$ donc $x_n < \ln n$.
On a $f_n'(x_n) = 0$ donc $e^{x_n} + 2x_n - n = 0$
puis $x_n = \ln(n - 2x_n) = \ln n + \ln(1 - 2\dfrac{x_n}{n})$
$=_{+\infty} \ln n - \dfrac{x_n}{n} + o(x_n/n)$ car $0 \leq x_n/n < \ln n/n \to 0$.
Donc $x_n \sim_{+\infty} \ln n$.

c) On a $\mu_n = f_n(x_n) = e^{x_n} + x_n^2 - nx_n$
$=_{+\infty} e^{\ln n + o(\ln n)} + (\ln n + o(\ln n))^2 - n(\ln n + o(\ln n))$
$=_{+\infty} ne^{o(1)} + (\ln^2 n + o(\ln^2 n)) - n\ln n + o(n\ln n)$
$=_{+\infty} (n + o(n)) + (\ln^2 n + o(\ln^2 n)) - (n\ln n + o(n\ln n))$
$\sim_{+\infty} -n\ln$ par croissance comparée.