

TD 10 : Les polynômes**10.1 Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$** **Exo 1 : Réponse :**

On note $A = BQ + R$ le résultat des divisions euclidiennes.

a) $Q = 3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et $R = -41X - 47$.

b) $Q = 3X^2 + 2X - 3$ et $R = -9X^2 - X + 7$.

c) $Q = X^2 + X - 2$ et $R = -7X + 6$.

d) $Q = X^3 - 2X^2 - 14X - 63$ et $R = 261 - 268X$.

Exo 2 : Indication :

On peut appliquer l'algorithme d'Euclide.

Réponse :

a) $PGCD = X - 2$

b) $PGCD = 1$

c) $PGCD = X^3 + 1$

d) $PGCD = (X - 1)^2$.

10.2 Multiplicité des racines**Exo 3 : Indication :**

La multiplicité est par définition le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^m | P(X)$.

Dans la pratique, on utilise plutôt la caractérisation par l'annulation des dérivées :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Réponse :

a) On a $\text{mult}_1 P = 3$ car $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$.

b) On a $\text{mult}_2 P = 4$ car $P(2) = P'(2) = P''(2) = P^{(3)}(2) = 0$ et $P^{(4)}(2) \neq 0$.

Exo 4 : Solution :

Par l'absurde, on introduit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine au moins double. On a donc $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

$$\text{Or } P'(X) = \sum_{k=0}^n \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}.$$

$$\text{Donc } P(\alpha) - P'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} = 0. \text{ Puis } \alpha^n = 0 \text{ donc } \alpha = 0.$$

Absurde car $P(0) = 1$ et 0 n'est pas une racine.

Exo 5 : Indication :

Les racines doubles sont solutions de $P(z) = P'(z) = 0$.

On recherche les racines de P' qui ne dépendent pas de a . On réalise la synthèse en vérifiant si c'est également une racine de P .

Solution :

$$\text{On recherche les racines de } P' = 7(X + 1)^6 - 7X^6.$$

$$\text{Pour } z \in \mathbb{C}^*, \text{ on a } P'(z) = 0 \text{ ssi } (z + 1)^6 = z^6$$

$$\text{ssi } \frac{z+1}{z} \in \mathbb{U}_6$$

$$\text{ssi } \exists \omega \in \mathbb{U}_6, z + 1 = \omega z$$

$$\text{ssi } \exists \omega \in \mathbb{U}_6 - \{1\}, z = \frac{1}{\omega - 1}.$$

$$\text{Donc } P \text{ admet une racine double si il existe } \omega \in \mathbb{U}_6 - \{1\} \text{ tel que } P\left(\frac{1}{\omega - 1}\right) = 0$$

$$\text{ssi } a = (z + 1)^7 - z^7 = z^6[(z + 1) - z] \text{ car } (z + 1)^6 = z^6$$

10.3 Equation polynomiales

$$\begin{aligned} \text{ssi } a = z^6 &= \frac{1}{(\omega-1)^6} = \left(\frac{1}{e^{2ik\pi/6}-1} \right)^6 = \left(\frac{e^{-ik\pi/6}}{2i \sin(k\pi/6)} \right)^6 \\ &= \frac{(-1)^k}{-64 \sin^6(k\pi/6)} \text{ pour } k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket. \\ \text{Donc les solutions sont } a &\in \left\{ 1, \frac{-1}{27}, \frac{1}{64} \right\}. \end{aligned}$$

Exo 6 : Réponse :

On calcul l'ordre d'annulation des dérivées $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) = (n+1)n \neq 0$.
Donc $\text{mult}_1 P = 2$.

10.3 Equation polynomiales

Exo 7 : Indication :

On commence par déterminer le degré du polynôme solution avant de déterminer ses coefficients. On peut l'écrire $P = aX^n + Q$ avec $a \neq 0$ le coefficient dominant, $n \in \mathbb{N}$ le degré et Q de degré strictement inférieur à n .

Solution :

- a) On écrit $P = aX^n + Q$ avec $a \neq 0$ le coefficient dominant, $n \in \mathbb{N}$ le degré et Q de degré strictement inférieur à n .

On a $P' + XP = aX^n + Q + anX^n + XQ' = a(n+1)X^n + Q + XQ'$. On sait que $a(n+1) \neq 0$. Donc en identifiant les plus haut degré, on a $n = 2$ et $a(n+1) = 1$. Ainsi $a = \frac{1}{3}$ et en posant $Q = bX + c$, on trouve :

$$(1/3X^2 + bX + c) + X(2/3X + b) = X^2 + 2bX + c. \text{ Donc } b = 0 \text{ et } c = 1.$$

Donc l'unique solution polynomiale est $P = \frac{1}{3}X^2 + 1$.

- b) De la même manière, on écrit $P = aX^n + Q$.

$$\begin{aligned} \text{On a } X^2P'' + 2XP' - 2P &= [an(n-1)X^n + X^2Q''] + 2[anX^n + XQ'] - 2[aX^n + Q] \\ &= a[n(n-1) + 2n - 2]X^n + [X^2Q'' + 2XQ' - 2Q]. \end{aligned}$$

$$\text{Donc on a } n(n-1) + 2n - 2 = 0 \text{ c\`ad } n^2 + n - 2 = 0 \text{ puis } n \in \{1, -2\}$$

. Ainsi $n = 1$ et $P = aX + b$.

L'équation s'écrit alors $0 + 2Xa - 2aX - 2b = 0$ d'où $b = 0$.

Donc les polynômes $P = aX$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ sont les solutions polynomiales de l'équation.

Exo 8 : Indication :

On peut raisonner avec le polynôme $Q(X) = P(X) - 1$ qui admet plusieurs racines connues. Autre méthode, on peut introduire les coefficients de P et résoudre le système linéaire à 4 inconnues et 4 équations.

Solution :

On sait que 0 est une racine au moins double et 1 est une racine de $P(X) - 1$.

Donc $P(X) - 1 = aX^2(X - 1)$ avec $a \in \mathbb{C}$ car P est de degré au plus 3.

Puis $P'(X) = a[3X^2 - 2X]$ et $P'(1) = -1$ donne $a = -1$.

Ainsi $P(X) = -X^2(X - 1) + 1 = -X^3 + X^2 + 1$.

10.4 Factorisation des polynômes

Exo 9 : Indication :

Pour factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$, on utilise la méthode suivante :

1. On recherche les racines complexes, $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.
2. On détermine leurs multiplicités. Deux cas se produisent :
 - Si on a trouvé n racines d'un polynôme de degré n alors les racines sont simples.
 - Sinon il existe une racine multiple, on regarde si $P'(z) = 0$.
3. On en déduit la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = a_n \prod (X - z)^{m_z}$. Puis la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ en regroupant les conjugués avec $\boxed{(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\text{Re}(z)X + |z|^2}$.

Solution :

- a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $P(z) = 0$ ssi $z^6 = -1 = e^{i\pi}$ ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, z = \omega e^{i\pi/6}$.
On a trouvé 6 racines distincts d'un polynôme de degré 6 donc elles sont simples.
Donc $X^6 + 1 = (X - i)(X + i)(X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})$
 $= (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$
- b) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. On a $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \sum_{k=0}^5 z^k = \frac{z^6 - 1}{z - 1}$.
Donc $P(z) = 0$ ssi $(z^6 - 1) = 0$ et $z \neq 1$ ssi $z \in \mathbb{U}_6 - \{1\}$.
On a trouvé 6 racines distincts d'un polynôme de degré 6 donc elles sont simples.
On a $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$
 $= (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$
- c) On peut remarquer que 1 est une racine de $P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.
Puis $P(X) = (X - 1)(X^2 - X + 1) = (X - 1)(X + j)(X + j^2)$.
Ainsi $P(X) = (X - 1)(X^2 - X + 1)$ est la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$.
- d) On peut remarquer que 2 est racine de $P(X) = X^3 - X^2 - 8X + 12$.
On calcul $P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) = 10 \neq 0$. Donc 2 est racine double.
Donc $P(X) = (X - 2)^2(X + 3)$ en factorisant.
- e) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $(z^2 - 3z + 2)^2 + z^2 = 0$ ssi $\left(\frac{z^2 - 3z + 2}{z}\right)^2 = -1 = i^2$
ssi $z^2 - 3z + 2 = iz$ ou $z^2 - 3z + 2 = -iz$
ssi $z^2 - (3 + i)z + 2 = 0$ ou $z^2 - (3 - i)z + 2 = 0$
Le discriminant de la première équation est $\Delta = (3 + i)^2 - 8 = 6i = 6e^{i\pi/2}$.
Donc $\delta = \sqrt{6}e^{i\pi/4} = \sqrt{3}(1 + i)$ convient.
Puis les racines sont $z_1 = \frac{3+i+\sqrt{3}(1+i)}{2}$ et $z_2 = \frac{3+i-\sqrt{3}(1+i)}{2}$. Leurs conjugués sont les racines de la seconde équation $z^2 - (3 - i)z + 2 = 0$.
On a trouvé 4 racines distincts d'un polynôme de degré 4 donc elles sont simples.
On a $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2 = (X - z_1)(X - z_2)(X - \bar{z}_1)(X - \bar{z}_2)$
 $= (X^2 - (3 + \sqrt{3})X + 4 + 2\sqrt{3})(X^2 - (3 - \sqrt{3})X + 4 - 2\sqrt{3})$.
En effet $\operatorname{Re}(z_1) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $|z_1|^2 = \frac{1}{4}((3 + \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2) = 4 + 2\sqrt{3}$.
Et $\operatorname{Re}(z_2) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $|z_2|^2 = \frac{1}{4}((3 - \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2) = 4 - 2\sqrt{3}$.
- f) Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z^8 + z^4 + 1 = \frac{z^{12} - 1}{z^4 - 1}$. D'où $z \in \mathbb{U}_{12} - \mathbb{U}_4$
Donc on a trouvé 8 racines d'un polynôme de degré 8.
Puis $X^8 + X^4 + 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{12} - \mathbb{U}_4} (X - \omega)$
 $= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$
- g) Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z^6 - z^3 + 1 = \frac{z^9 + 1}{z^3 + 1}$. D'où $z = e^{i\pi/9} e^{2ik\pi/9}$ pour $k \in \{0, 2, 3, 5, 6, 8\}$.
Donc on a trouvé 6 racines d'un polynôme de degré 6.
On a $X^6 - X^3 + 1$
 $= (X - e^{i\pi/9})(X - e^{-i\pi/9})(X - e^{5i\pi/9})(X - e^{-5i\pi/9})(X - e^{11i\pi/9})(X - e^{-11i\pi/9})$
 $= (X^2 - 2\cos(\pi/9)X + 1)(X^2 - 2\cos(5\pi/9)X + 1)(X^2 - 2\cos(11\pi/9)X + 1)$
- h) Soit $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$.
On a $(z + 1)^6 + (z - 1)^6 = 0$
ssi $\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = -1 = e^{i\pi}$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, \frac{z-1}{z+1} = e^{i\pi/6}\omega$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, z = \frac{e^{i\pi/6}\omega - 1}{e^{i\pi/6}\omega + 1} = i \tan\left(\frac{(2k+1)\pi}{12}\right)$ avec l'arc moitié.
On a donc trouvé 6 racines simples du polynôme.
Le coefficient dominant est 2.
Puis $(X + 1)^6 + (X - 1)^6$
 $= 2(X + i/\tan(\pi/12))(X - i/\tan(\pi/12))(X - i/\tan(\pi/4))$
 $\times (X + i/\tan(\pi/4))(X - i/\tan(5\pi/12))(X + i/\tan(5\pi/12))$

$$= 2(X^2 + \tan^2(\pi/12))(X^2 + 1)(X^2 + \tan^2(\pi/12)).$$

Exo 10 : Indication :

Si le polynôme admet une racine réelle alors on peut décomposer $P(X) = R(X) + iI(X)$ avec $R, I \in \mathbb{R}[X]$. Une racine réelle de P est alors une racine commune de R et I . On peut calculer leur PGCD, ou factoriser celui de plus bas degré.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{a) On a } P(X) &= 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + (1 - 3i) \\ &= (2X^3 - 5X^2 + 1) - i(6X^2 - 9X + 3) \\ &= R(X) - iI(X). \end{aligned}$$

$$\text{Or } I(X) = 6X^2 - 9X + 3 = 3(2X - 1)(X - 1).$$

On vérifie si $1/2$ ou/et 1 sont des racines de $R(X)$.

$$\text{On a } R(1) = -2 \text{ et } R(1/2) = 0. \text{ Puis } R(X) = (2X - 1)(X^2 - 2X - 1).$$

$$\text{Donc } P(X) = (2X - 1)[X^2 - 2X - 1 - i(X - 1)] = (2X - 1)[X^2 - (2 + i)X + (i - 1)].$$

$$\text{On a } \Delta = (2 + i)^2 - 4(i - 1) = 7. \text{ Donc les racines sont } \frac{2+i-\sqrt{7}}{2} \text{ et } \frac{2+i+\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{b) On a } P(X) = 6X^4 + X^3 + (6i + 10)X^2 + (2 + i)X - (4 + 2i) = R(X) + iI(X) \text{ avec } R(X) = 6X^4 + X^3 + 10X^2 + 2X - 4 \text{ et } I(X) = 6X^2 + X - 2 = (3X + 2)(2X - 1) \text{ de racines } 1/2 \text{ et } -2/3.$$

$$\text{Puis } R(-2/3) = R(1/2) = 0 \text{ donc } R(X) = (3X + 2)(2X - 1)(X^2 + 2).$$

$$\text{Donc } P(X) = (3X + 2)(2X - 1)(X^2 + 2 + i).$$

Pour résoudre $z^2 = -2 - i$, on écrit $z = a + ib$.

$$\text{Il vérifie le système } \begin{cases} a^2 - b^2 &= -2 \\ 2ab &= -1 \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Donc } a^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \text{ et } b^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2} \text{ avec } ab < 0.$$

$$P(X) = (3X + 2)(2X - 1) \left(X - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right) \left(X + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right).$$

10.5 Avec recherche d'idées

Exo 11 : On note $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ et $P'(X) = 5X^4 - 2X$ s'annule en 0 et $a = \sqrt[3]{2/5}$.

Puis $P(0) = 1 > 0$ et $P(a) = a^2(a^3 - 1) + 1 = a^2(2/5 - 1) + 1 = 3/5a^2 + 1 > 0$ sont les extremums locaux de la fonction. Et $\lim_{+\infty} P = +\infty$ et $\lim_{-\infty} P = -\infty$.

Donc d'après les théorème de la bijection continue il existe une unique racine dans l'intervalle $]-\infty, 0[$. Puis aucune dans les intervalles $]0, a[$ et $]a, +\infty[$.

Par l'absurde, on note $\alpha = -p/q$ la racine supposée rationnelle. On peut supposer p et q premiers entre eux. Donc $P(\alpha) = -p^5/q^5 + p^2/q^2 + 1 = 0$ donne $-p^5 + p^2q^3 + q^5 = 0$.

Donc q divise $q^5 + p^2q^3 = p^5$. Puis un facteur premier qui divise q divise p . Donc $q = 1$ car $\text{pgcd}(q, p) = 1$ et ainsi $\alpha = -p$ est un entier.

Or $P(-1) = -1 < 0$ donc $\alpha \in]-1, 0[$ d'après les variations de la fonction.

Ainsi un entier $\alpha \in]-1, 0[$ est Absurde.

Exo 12 : A l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k \\ &= (1 - X)^n (3X + (1 - X)^2)^n \\ &= (1 - X)^n (X^2 + X + 1)^n \\ &= (-1)^n (X - 1)^n (X - j)^n (X - j^2)^n. \end{aligned}$$

Donc les racines sont $1, j$ et j^2 et elles sont de multiplicité n .

Exo 13 : Soit a une racine de P' alors a est racine de P car $(X - a)|P'(X)|P(X)$.

De plus $\text{mult}_a P = \text{mult}_a P' + 1$.

Or P et P' sont scindés sur $\mathbb{C}$.

Donc $\deg(P') = \sum_{P'(a)=0} \text{mult}_a P' = \sum_{P'(a)=0} (\text{mult}_a P - 1) \leq \deg(P) - N$.

avec N le nombre de racines de P' . Or $\deg(P') = \deg P - 1$ donc $N \leq 1$.

Si $N = 0$ alors P' est constant et $P(X) = \alpha(X - a)$.

Si $N = 1$ alors $P' = \alpha(X - a)^n$ puis $P = \frac{\alpha}{n+1}(X - a)^{n+1}$.

Dans tous les cas P admet une unique racine et $P(X) = c(X - a)^m$ avec $c \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{N}$.

Exo 14 : On raisonne par double implications.

($\Leftarrow$) On suppose que $b = aq$ avec $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $X^b - 1 = (X^a)^q - 1^q = (X^a - 1) \sum_{k=0}^{q-1} X^{ak}$ est un multiple de $X^a - 1$.

($\Rightarrow$) On suppose que $X^b - 1 \mid X^a - 1$.

Alors $\omega = e^{2i\pi/b}$, qui est une racine de $X^b - 1$, est une racine de $X^a - 1$.

Ainsi $\omega^a - 1 = 0$ c'est à dire $e^{2ia\pi/b} = 1$ donc $2i\pi a/b \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Puis $a/b \in \mathbb{Z}$ i.e. $b \mid a$.

10.6 Problèmes

Exo 15 : Indication :

a) et b) On peut raisonner par récurrence double.

c) On résout l'équation trigonométrique $\cos(n\theta) = 0$ pour en déduire les racines $\alpha = \cos \theta$.

d) On utilise les relations coefficients/racines $\prod_{P(\alpha)=0} \alpha^{m_\alpha} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Solution :

a) On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1} .

Initialisation $n = 1$ on a $P_1 = X$ est de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$.

$n = 2$ on a $P_2 = 2X^2 - 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n = 2^{n-1}X^n + R_n$ et $P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R_{n+1}$ avec $\deg(R_n) < n$ et $\deg(R_{n+1}) < n + 1$.

Donc $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n = 2^{n+1}X^{n+2} + 2XR_{n+1} - P_n$ avec $R_{n+2} = 2XR_{n+1} - P_n$ de degré strictement plus petit que $n + 2$.

Donc P_{n+2} est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} .

b) On montre que $P_n(\cos x) = \cos(nx)$ par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation $n = 0$ On a $P_0(\cos x) = 1$ et $\cos(0x) = 1$.

$n = 1$ On a $P_1(\cos x) = \cos x = \cos(1x)$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n(\cos x) = \cos(nx)$ et $P_{n+1}(\cos x) = \cos((n+1)x)$.

Donc $P_{n+2}(\cos x) = 2 \cos x P_{n+1}(\cos x) - P_n(\cos x) = 2 \cos x \cos((n+1)x) - \cos nx$ par HR.

Or $2 \cos((n+1)x) \cos(x) = \cos[(n+1)x+x] + \cos[(n+1)x-x] = \cos((n+2)x) + \cos(nx)$.

Donc $P_{n+2}(\cos x) = \cos((n+2)x) + \cos(nx) - \cos(nx) = \cos((n+2)x)$.

c) On a $\cos(nx) = 0$ ssi $nx \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$ ssi $x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Donc $P_n(\cos x) = 0$ pour ces valeurs et $\alpha_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des racines de P_n .

Ces nombres sont 2 à 2 distincts et il y en a n le degré de P_n .

Donc ce sont toutes les racines de P_n et elles sont simples.

En particulier $P_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha_k)$.

d) Le produit des racines est donné par le coefficient constant $c_n = P_n(0)$.

On a $c_0 = 1, c_1 = 0$ et $c_{n+2} = 2.0.c_{n+1} - c_n = -c_n$ par la récurrence de l'énoncé.

Donc $c_{2k} = (-1)^k$ et $c_{2k+1} = 0$.

Puis $p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = (-1)^n \frac{c_n}{2^{n-1}}$.

Donc $p_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}$ et $p_{2k+1} = 0$.

Exo 16 : Indication :

d) On peut raisonner par récurrence simple. Le théorème de Rolle permet de démontrer que si P s'annule n fois entre $] -1, 1[$ alors P' s'annule $n - 1$ fois entre $] -1, 1[$. Ceci montre que la dérivée à une racine de moins alors que notre récurrence veut une racine de plus. On sait que $Q_n^{(k)}$ s'annule k fois par hypothèse de récurrence et 2 fois de plus (en $x = 1$ et $x = -1$) d'après le c). C'est à dire $Q_n^{(k)}$ s'annule $k + 2$ fois, on peut donc démontrer que $Q_n^{(k+1)}$ s'annulent $k + 1$ fois.

f) On applique la formule de Leibniz à l'ordre $n + 1$
$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Solution :

- a) On obtient $P_1(X) = 2X$, $P_2(X) = 12X^2 - 4$ et $P_3(X) = 120X^3 - 72X$.
- b) On a $\deg Q_n = \deg(X^2 - 1)^n = n \deg(X^2 - 1) = 2n$. Puis P_n est la dérivée n -ième, donc $\deg P_n = \deg Q_n - n = n$.
- c) On a $Q_n(X) = (X^2 - 1)^n = (X - 1)^n (X + 1)^n$ donc par divisibilité les racines sont 1 et -1 et de multiplicité n .
- d) On démontre le résultat par récurrence pour $k = 0$. On a $Q_n^{(0)} = Q_n$ n'a aucune racine dans $] -1, 1[$. Puis si pour $0 \leq k < n$, $Q_n^{(k)}$ admet exactement k racines : $-1 < x_1 < \dots < x_k < 1$. Or on sait de plus que 1 et -1 sont racines de $Q_n^{(k)}$ de multiplicité $n - k$. Donc le théorème de Rolle, la dérivée de $Q_n^{(k)}$ admet des racines entre chacune de ces racines : il existe donc $-1 < y_1 < x_1 < y_2 < \dots < x_k < y_{k+1} < 1$ tel que $Q_n^{(k+1)}(y_j) = 0$. Ceci constitue $k + 1$ racines de $Q_n^{(k+1)}$. Puis $\deg(Q_n^{(k+1)}) = 2n - (k + 1) \geq \sum_{\alpha \text{ racine}} \text{mult}_{\alpha}(Q_n^{(k+1)}) \geq \text{mult}_1(Q_n^{(k+1)}) + \text{mult}_{-1}(Q_n^{(k+1)}) + k + 1 = (n - k - 1) + (n - k - 1) + k + 1 = 2n - (k + 1)$. Donc on a égalité et il n'y a donc pas d'autres racines que $-1 < y_1 < \dots < y_{k+1} < 1$. C'est à dire exactement $(k + 1)$ racines distinctes dans $] -1, 1[$.
- e) On dispose ainsi de n racines réelles distinctes $-1 < a_1 < \dots < a_n < 1$ d'un polynôme de degré n d'où $P(X) = \lambda(X - a_1) \dots (X - a_n)$ est scindé à racines simples.
- f) On a $P_{n+1}(X) = ((X^2 - 1)Q_n)^{(n+1)}$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X^2 - 1)^{(k)} Q_n^{(n-k)}$$

$$= (X^2 - 1)Q_n^{(n+1)} + (n+1)(2X)Q_n^{(n)} + \frac{(n+1)n}{2} 2Q_n^{(n-1)}$$

$$= (X^2 - 1)P'_n(X) + 2X(n+1)P_n(X) + n(n+1)Q_n^{(n-1)}.$$
- g) On montre par récurrence que $P_n(1) = 2^n n!$. On a $P_1(1) = 2$, $P_2(1) = 8$ et $P_3(1) = 48$. La formule de la question précédente se simplifie car 1 et -1 sont racines de $X^2 - 1$ et $Q_n^{(n-1)}$. Donc $P_{n+1}(1) = 2(n+1)P_n(1) = 2(n+1)2^n n! = 2^{n+1} n!$. De même, on obtient $P_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$ (ou par parité des fonctions P_n).