DM6 : Arithmétique sur $\mathbb{Z}$
à rendre le jeudi 30 janvier 2025.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ décomposé en produit de facteurs premiers $n = \prod_{p \text{ premier}} p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_p \in \mathbb{N}$ qui stationne en 0.

1. Montrer que pour p premier et $k \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence : $p^k | n$ ssi $k \in [\![0, \alpha_p]\!]$.
2. En déduire que le nombre de diviseurs positifs de n est $\prod_{p \text{ premier}} (\alpha_p + 1)$.
3. Déterminer le plus petit entier naturel qui admet exactement 15 diviseurs positifs.

Exercice 2 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

1. Montrer qu'il existe un nombre α tel que $\alpha = 1[a]$ et $\alpha = 0[b]$.
2. En déduire que pour tous restes $0 \leq r_1 < a$ et $0 \leq r_2 < b$, il existe un unique reste $0 \leq r < ab$ tel que $r = r_1[a]$ et $r = r_2[b]$.

On note $\varphi(n) = \text{Card}\{0 \leq r < n \text{ tel que } pgcd(r, n) = 1\}$.

3. Calculer $\varphi(n)$ pour $2 \leq n \leq 10$.
4. Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
5. Calculer $\varphi(p)$ pour p premier puis $\varphi(73692)$.