Semaine 16 - Du 27 au 31 Janvier 2025

Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

Révision de la semaine 15

Nombres premiers

Décomposition en produit de premiers, expression du *pgcd* et *ppcm*.
Crible d'Eratosthène. L'ensemble des nombres premiers est infini.
Pour un premier p, $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$.

Les polynômes

Structure abstraite de $\mathbb{K}[X]$

Construction comme suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui stationne en 0.
Coefficient dominant, polynôme unitaire, degré et espace $\mathbb{K}_n[X]$.
Degré d'une somme, d'un produit, d'une puissance et d'une composée.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Diviseurs et multiples dans $\mathbb{K}[X]$. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$.
Existence et unicité de la division euclidienne.
PGCD et algorithme d'Euclide. Polynômes premiers entre eux.
Théorème de Bézout et Lemme de Gauss.

Liste de Questions de cours :

a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $X \neq 0$ vérifiant $AX = \lambda X$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre une équation diophantienne linéaire avec les théorèmes de Bézout et de Gauss.

c) Programmer en Python l'algorithme d'Euclide et démontrer sa terminaison et sa validité.

d) Programmer en Python le crible d'Eratosthène et montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

e) Soit $a, n \geq 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.

f) Démontrer que $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.