

Les polynômes

Structure abstraite de $\mathbb{K}[X]$

Construction comme suite d'éléments de \mathbb{K} qui stationne en 0.
Définitions et propriétés de la somme, du produit et du produit par un scalaire.
Coefficient dominant, polynôme unitaire, degré et espace $\mathbb{K}_n[X]$.
Degré d'une somme, d'un produit, d'une puissance et d'une composée.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Diviseurs et multiples dans $\mathbb{K}[X]$. Polynômes irréductibles sur \mathbb{K} .
Existence et unicité de la division euclidienne.
PGCD et algorithme d'Euclide. Polynômes premiers entre eux.
Théorème de Bézout et lemme de Gauss.

Racines d'un polynôme

Lien avec la divisibilité. Multiplicité d'une racine.
Multiplicité d'une somme et d'un produit.
Lien entre somme des multiplicités et degré. Polynôme scindé.

Dérivation formelle

Dérivation des combinaisons linéaires et des produits.
Dérivation n -ième et formule de Leibniz.
Formule de Taylor.
Lien entre annulations des dérivées successives et multiplicité d'une racine.

Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème de d'Alembert-Gauss sur $\mathbb{C}[X]$. (résultat admis)
Facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
Factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
Relations entre somme et produit des racines et les coefficients.

Liste de Questions de cours :

- a) Programmer en Python le crible d'Eratosthène et montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- b) Soit $a, n \geq 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.
- c) Démontrer que $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.
- d) Démontrer la règle de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ avec la définition formelle.
- e) Énoncer et démontrer le lien entre l'annulation des dérivées et la multiplicité d'une racine.
- f) Énoncer et démontrer la formule de Taylor.