DM6 - Corrigé

Exercice 1 :

1. ($\Rightarrow$) On suppose $p^k | n = p^{\alpha_p} d$ avec d premier avec p.
   Donc d'après le théorème de Gauss. $p^k | p^{\alpha_p}$ puis $p^k \leq p^{\alpha_p}$ donc $k \leq \alpha_p$.
   ($\Leftarrow$) On suppose $k \leq \alpha_p$ donc $p^k | p^{\alpha_p} | n$ par transitivité.
2. On écrit $d = \prod_{p \text{ premier}} p^{k_p}$ un diviseur de n. On a $p^{k_p} | d | n$ donc $k_p \in [\![0, \alpha_p]\!]$.
   Donc $Div(n) = \{ \prod_{p \text{ premier}} p^{k_p}$ pour $k_p \in [\![0, \alpha_p]\!]\}$. Donc le nombre de diviseur est le nombre d'indices $(k_p)_{p \text{ premier}}$ tel que $0 \leq k_p \leq \alpha_p$. On a $\text{Card}([\![0, \alpha_p]\!]) = \alpha_p + 1$. Donc il y a $\prod_{p \text{ premier}} (\alpha_p + 1)$ diviseurs de n.
3. On suppose que $\prod_{p \text{ premier}} (\alpha_p + 1) = 15 = 5 \times 3$. Donc $n = p^{14}$ ou $n = p^4 q^2$ avec p, q des nombres premiers distincts. Pour être minimal, il faut $p = 2$ et $q = 3$.
   Donc $n = 2^{14} = 16384$ ou $n = 2^4.3^2 = 144$. Ainsi $n = 144$ est le plus petit.

Exercice 2 :

1. D'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$. Donc $\alpha = bv = 1 - au$ est multiple de b et est congru à 1 modulo a.
2. En utilisant deux fois a), il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = 1[a], \alpha = 0[b], \beta = 0[a]$ et $\beta = 1[b]$. On pose $r_0 = r_1\alpha + r_2\beta \in \mathbb{Z}$ alors par opération, on a : $r_0 = r_1[a]$ et $r_0 = r_2[b]$. Puis le reste de la division euclidien de r_0 par ab respecte encore les mêmes congruences et vérifie $0 \leq r < ab$.
3. On a : $\varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4$,
   $\varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6, \varphi(8) = 4, \varphi(9) = 6$ et $\varphi(10) = 4$.
4. On construit la bijection définie par la question b) $\Psi : [\![0, a[\![\times [\![0, b[\![\mapsto [\![0, ab[\![$. On remarque que $n \wedge ab = 1 \Leftrightarrow n \wedge a = 1$ et $n \wedge b = 1$ donc :
   $\Psi(\{r_1 \wedge a = 1\} \times \{r_2 \wedge b = 1\}) = \{r \wedge ab = 1\}$. Comme Ψ est une bijection alors on dispose de l'égalité des cardinaux $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$.
5. On remarque que tout nombre inférieur à p est premier avec p. Donc $\varphi(p) = p - 1$.
   Puis on décompose $73692 = 4.9.23.89$ permettant d'avoir :
   $\varphi(73692) = \varphi(4)\varphi(9)\varphi(23)\varphi(89) = 2.6.22.88 = 23232$.