DS de Math n° 7 - Corrigé

Exercice 1 : 1) On associe la matrice augmentée puis on applique le pivot de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&7&0\\3&6&-7&23&4\\2&-3&17&-1&1\end{array}\right)\sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&21&-3\\0&1&0&-109/9&10/3\\0&0&1&-14/3&1\end{array}\right)$$

2) On remarque que $3\left(\begin{smallmatrix}5\\-1\end{smallmatrix}\right)$ est une solution particulière.
Puis l'équation homogène $3x_0+14y_0=0$ vérifie $3|3x_0=-14y_0$ avec $pgcd(3,14)=1$.
D'après le théorème de Gauss $3|y_0$ puis il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y_0=3k$. Puis $x_0=-14y_0/3=-14k$.
L'ensemble des solutions est $\left(\begin{smallmatrix}15\\-3\end{smallmatrix}\right)+\mathbb{Z}\left(\begin{smallmatrix}-14\\3\end{smallmatrix}\right)$.

3) On a $(109k+119)/3\in\mathbb{Z}$ ssi $3|109k+119$
ssi $109k+119\equiv 0[3]$ ssi $1k+2\equiv 0[3]$ ssi $k\equiv -2\equiv 1[3]$.

4) On résout sous forme échelonné réduit le système.
L'équation $3c-14d=3$ donne il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $c=15+14k$ et $d=3+3k$ d'après b)
Puis l'équation $b=(109/9)d+10/3=(109k+119)/3\in\mathbb{Z}$ impose $k=3q+1$ d'après c) donc $b=76+109q$, $c=29+42q$ et $d=6+9q$.
Enfin l'équation $a=-21d-3=-129-189q$.
Donc l'ensemble des solutions est $\left(\begin{smallmatrix}-129\\76\\29\\6\end{smallmatrix}\right)+\mathbb{Z}\left(\begin{smallmatrix}-189\\109\\42\\9\end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 2 : 1) Soit $z\in\mathbb{C}$.
On a $P_1(z)=0$ ssi $(z^2-z+1)^2=-1$ ssi $z^2-z+1=\pm i$.
On résout désormais l'équation du 2nd degré $z^2-z+1-i=0$.
On a $\Delta=1-4(1-i)=-3+4i=(a+ib)^2$.
En résolvant $\begin{cases}a^2-b^2&=-3\\2ab&=4\\a^2+b^2&=5\end{cases}$, on obtient $\delta=\pm(1+2i)$.
Donc $z=\frac{1+(1+2i)}{2}=1+i$ ou $z=\frac{1-(1+2i)}{2}=-i$.
Ainsi les racines de P_1 sont $\{1+i,-i,1-i,i\}$ avec les conjugués. On a 4 racines d'un polynôme de degré 4, il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
Donc $P_1(X)=1(X-i)(X+i)(X-(1+i))(X-(1-i))=(X^2+1)(X^2-2X+2)$.

2) On peut reconnaître la formule du Binôme de Newton
$(X+1)^4=X^4+4X^3+6X^2+4X+1$. Donc $P_2(X)=(X+1)^4+X^4$.
On recherche les racines complexes $z\in\mathbb{C}^*$.
$P_2(z)=0$ ssi $\left(\frac{z+1}{z}\right)^4=-1=e^{i\pi}$
ssi $\exists\omega\in\mathbb{U}_4, \frac{z+1}{z}=\omega e^{i\pi/4}$
ssi $\exists\omega\in\mathbb{U}_4, z=\frac{1}{\omega e^{i\pi/4}-1}$
ssi $\exists k\in[\![0,3]\!], z=\frac{1}{\exp(2ik\pi/4+i\pi/4)-1}=\frac{1}{2i\sin((2k+1)\pi/8)e^{i(2k+1)\pi/8}}=\frac{e^{-i(2k+5)\pi/8}}{2\sin((2k+1)\pi/8)}$.
On a trouver 4 racines d'un polynôme de degré 4, donc il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
Puis $P_2(X)=2(X-\frac{e^{-5i\pi/8}}{2\sin(\pi/8)})(X-\frac{e^{-7i\pi/8}}{2\sin(3\pi/8)})(X-\frac{e^{5i\pi/8}}{2\sin(\pi/8)})(X-\frac{e^{7i\pi/8}}{2\sin(3\pi/8)})$
$=2(X^2-2\frac{\cos(5\pi/8)}{2\sin(\pi/8)}X+\frac{1}{4\sin^2(\pi/8)})(X^2-2\frac{\cos(7\pi/8)}{2\sin(3\pi/8)}X+\frac{1}{4\sin^2(3\pi/8)})$
$=2(X^2+X+\frac{1}{4\sin^2(\pi/8)})(X^2+X+\frac{1}{4\cos^2(\pi/8)})$
En effet $\sin(\pi/8)=\cos(3\pi/8)=-\cos(5\pi/8)$ et $\sin(3\pi/8)=\cos(\pi/8)=-\cos(7\pi/8)$.
On obtient en réalité $P_2(X)=2(X^2+X+\frac{2+\sqrt{2}}{2})(X^2+X+\frac{2-\sqrt{2}}{2})$.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $P_3(z) = (z^2)^3 + (-2)(z^2)^2 + (-2)^2 z^2 + (-2)^3 = \sum_{k=0}^{3} (z^2)^{3-k}(-2)^k = \frac{(z^2)^4 - (-2)^4}{z^2 - (-2)}$.
Donc $P_3(z) = 0$ ssi ($z^8 - 2^4 = 0$ et $z^2 + 2 \neq 0$) ssi ($z \in \sqrt{2}\mathbb{U}_8$ et $z \notin \sqrt{2}\{i, -i\}$.
Donc les racines de P_3 sont $\sqrt{2}\{1, e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, -1, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4}\}$. On a trouvé 6 racines d'un polynôme de degré 6, donc il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
Puis $P_3(X) = 1(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}e^{i\pi/4})(X - \sqrt{2}e^{-i\pi/4})(X - \sqrt{2}e^{3i\pi/4})(X - \sqrt{2}e^{-3i\pi/4})$
$= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.

Exercice 3 : 1) On a $P_0(X) = X^2 + X + 1$ avec $\Delta = -3 < 0$. Donc P_0 est irréductible sur $\mathbb{R}$.

2) On a $P_1(X) = X^4 + X^2 + 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine on a $z^4 + z^2 + 1 = 0$ donc $z^2 \in \{j, j^2\}$ car le polynôme est bicarré.
Puis $z^2 = j = e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow z \in \{e^{i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} = \{-j^2, j^2\}$ et $z^2 = j^2$ donne les conjuguées $\{-j, j\}$.
Ainsi $P_2(X) = (X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$ admet 4 racines simples.
Donc sur $\mathbb{R}[X]$, on obtient : $P_1(X) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcul $P_n(X)(X^{2^{n+1}} - X^{2^n} + 1) = (X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1)(X^{2^{n+1}} - X^{2^n} + 1)$
$= (X^{2^{n+1}} + 1)^2 - (X^{2^n})^2 = X^{2^{n+2}} + 2X^{2^{n+1}} + 1 - X^{2^{n+1}} = P_{n+1}(X)$.

4) La question précédente donne ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n | P_{n+1}$.
Ainsi par transitivité de la relation d'ordre, on trouve si $n_1 \leq n_2$, alors $P_{n_1} | P_{n_2}$.
Donc le pgcd de deux de ces polynômes est le plus petit car il divise le plus grand : $PGCD(P_{n_1}, P_{n_2}) = P_{\min(n_1, n_2)}$.

5) On a : $P_0(X) = X^2 + X + 1$ et pour $n \in \mathbb{N}, P_0(X^{2^n}) = X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1 = P_n(X)$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_n alors z^{2^n} est une racine de $P_0(X) = (X - j)(X - j^2)$.
Ainsi $z^{2^n} = j = e^{2i\pi/3} \leftrightarrow z = e^{2^{1-n} i\pi(k+1/3)}$ pour $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.
On dispose ainsi de 2^n racines et de 2^n conjugués associés d'un polynôme de degré 2^{n+1}. Les racines sont simples et : $P_n(X) = \prod_{k=0}^{2^n-1} (X - e^{2^{1-n} i\pi(k+1/3)})(X - e^{-2^{1-n} i\pi(k+1/3)}) = \prod_{k=0}^{2^n-1} (X^2 - 2\cos(2^{1-n} i\pi(k+1/3))X + 1)$.

6) D'après les liens entre somme/produit et coefficients du polynôme. On lit le produit vaut $(-1)^{2^{n+1}}1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la somme vaut 0 dès que $n \geq 1$. Pour $n = 0$, la somme vaut -1.

Problème I : (Calcul de la somme des puissances n-ième des entiers)

1) On a : $P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k (X+1)^k - X^k = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k (kX^{k-1} + ... + 1)$ est une somme de polynôme de degré différent donc de degré le maximum des degrés, c'est à dire $\deg(P) - 1$.

2) On recherche $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$ donc $n = \deg(P_n) - 1$ ainsi on a : $\deg(P_n) = n + 1$

3) Les solutions de (E_0) sont de degré 1 donc $P_0(X) = aX + b$. Puis $1 = a(X+1) + b - aX - b = a$ donc les solutions de (E_0) sont les polynômes $P_0(X) = X + b$ pour b quelconque.
Les solutions de (E_1) s'écrivent : $P_1(X) = aX^2 + bX + c$ et vérifient : $X = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c = 2aX + a + b$ par identification on trouve $a = -b = \frac{1}{2}$.
Les solutions sont donc $P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2} + c$ pour c quelconque.

4) Si $P_n(X)$ est solution de (E_n) alors $X^n = P_n(X+1) - P_n(X) = [P_n(X+1) + a] - [P_n(X) + a]$ pour toute constante $a \in \mathbb{R}$, d'où $P_n(X) + a$ est aussi solution. On peut donc regarder $P_n(X) - P_n(0)$ dont 0 est racine et est solution de (E_n).

5) L'équation (E_n) s'écrit $P_n(X+1) = P_n(X) + X^n$, d'où $P_n(1) = P_n(0) + 0^n = 0$. Puis en dérivant on trouve : $P_n^{(k)}(X+1) = P_n^{(k)}(X) + n...(n-k+1)X^{n-k}$. En évaluant en $X = 0$, on obtient $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(0)$. Donc 1 est racine de P_n de même multiplicité que 0.

6) En dérivant une fois l'équation $X^{n+1} = P_{n+1}(X+1) - P_{n+1}(X)$, on obtient : $(n+1)X^n = P'_{n+1}(X+1) - P'_{n+1}(X)$. Ainsi $\frac{1}{n+1}P'_{n+1}(X)$ est solution de (E_n).

7) On résout donc par récurrence. On a : $\frac{1}{2}P'_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + a$. Donc $P_2(X) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + aX + b$. La condition $P_n(0) = P_n(1) = 0$ s'écrit : $b = 0$ et $a = \frac{1}{6}$. Donc $P_2(X) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$.

   Pour $n = 3$, on a : $\frac{1}{3}P'_3(X) = P_2(X) + a = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X + a$. Donc $P_3(X) = \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + aX + b$. Et on obtient $a = b = 0$ par la condition $P_n(0) = P_n(1) = 0$.

8) On a $\sum_{k=0}^N k^n = \sum_{k=0}^N P_n(k+1) - P_n(k) = P_n(N+1) - P_n(0)$. Donc on déduit :
$\sum_{k=0}^N k = P_1(N+1) = \frac{(N+1)N}{2}$,
$\sum_{k=0}^N k^2 = P_2(N+1) = \frac{1}{3}(N+1)^3 - \frac{1}{2}(N+1)^2 + \frac{1}{6}(N+1) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ et
$\sum_{k=0}^N k^3 = P_3(N+1) = \frac{1}{4}(N+1)^4 - \frac{1}{2}(N+1)^3 + \frac{1}{4}(N+1)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

Problème II : (Polynôme de Bernstein)

1. On reconnaît la formule du Binôme de Newton
$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = [X + (1-X)]^n = 1$.
2. On a $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$ car $[(n-1)-(k-1)]! = (n-k)!$.
Puis $\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$
$= \sum_{k=1}^n n\binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k}$
$= n\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} X^{l+1}(1-X)^{n-l-1}$ par changement d'indices
$= nX\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} X^l(1-X)^{(n-1)-l}$
$= nX.1 = nX$ d'après q1.
3. On a $\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$
$= \sum_{k=2}^n n(n-1)\binom{n-2}{k-2} X^k(1-X)^{n-k}$
$= n(n-1)X^2\sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} X^l(1-X)^{(n-2)-l}$
$= n(n-1)X^2$
4. On a $P(X) = \sum_{k=0}^n \left(X - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$
$= \sum_{k=0}^n \left(X^2 - 2\frac{k}{n}X + \frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$
$= X^2 S_0(X) - \frac{2X}{n}S_1(X) + \frac{1}{n^2}S_2(X)$ par linéarité.
Avec $S_0(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = 1$.
Et $S_1(X) = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = nX$.
Et $S_2(X) = \sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$
$= \sum_{k=0}^n (k^2-k)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} + S_1(X)$
$= n(n-1)X^2 + nX$.
Donc $P(X) = X^2 - \frac{2X}{n}nX + \frac{1}{n^2}(n(n-1)X^2 + nX) = \frac{-n^2X^2 + n^2X^2 - nX^2 + nX}{n^2} = \frac{X(1-X)}{n}$.
5. On a $\sum_{k\in A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$
$\leq \sum_{k\in A} \frac{1}{\sqrt{n}}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$
$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$
$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'après q1.
6. Dans ce cas $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $y_k = \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq 1$. Ainsi $y_k \leq y_k^2 = n\left(x - \frac{k}{n}\right)^2$ analogue à la q4.
Donc $\sqrt{n}\sum_{k\notin A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$
$= \sum_{k\notin A} y_k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$
$\leq n\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = n\frac{x(1-x)}{n}$.

On a donc bien $\sum_{k\notin A} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

7. On a $S(x) = S_5(x) + S_6(x)$ avec $S_5(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $S_6(x) = \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$

   En étudiant la fonction $x \mapsto x(1-x)$, on voit qu'elle est maximal en $x = 1/2$ et vaut $1/4$. Donc $x(1-x) \leq 1/4$.

   Ainsi $S(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} = \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

8. La calcul de la somme donne : $\sum_{k=0}^{n} (f(k/n) - f(x)) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$
   $= \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ par linéarité
   $= B_n(x) - f(x)$ par définition et q1.

9. La fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$ donc d'après le thm de la borne atteinte : f' est bornée par $M = \sup_[0,1]|f'|$. De plus, la fonction f est continue et dérivable sur $[0,1]$ d'après l'inégalité des accroissements finis. On a $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M$. Donc f est M-lipschitzienne.

10. On a $|B_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} (f(k/n) - f(x)) \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|$
    $\leq \sum_{k=0}^{n} |f(k/n) - f(x)| \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ d'après l'inégalité triangulaire
    $\leq \sum_{k=0}^{n} M\left|\frac{k}{n} - x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ car f est M-lip
    $\leq M\frac{5}{4\sqrt{n}}$ d'après la q7.

    Or $M\frac{5}{4\sqrt{n}} \to_{n\to+\infty} 0$ donc $B_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)$.

Problème III : D'après le Concours Mines Albi-Alès-Douai-Nantes 1999

1. On a g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
   et $g''(x) = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3}$.
2. On a $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - 2$ et $Q_0 = 0, Q_1 = 1, Q_2 = 2X$.
3. En dérivant l'expression de $g^{(n)}$, on trouve :
   $g^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)\sin^{(n)}(x) + P_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n'(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+1}} - (n+1)\frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}}$.
   avec $\sin^{(n)} = -\sin^{(n+2)}$, on obtient :
   $P_{n+1} = XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n$ et $Q_{n+1} = XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n$.
4. On trouve $P_3 = X^3 - 6X$ et $Q_3 = 3X^2 - 6$.
5. On montre par récurrence que $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P_n = X^n + ...$ et $Q_n = nX^{n-1} + ...$ à des formules de la question 3.
6. Soit U, V deux polynômes tels que $U(x)\sin(x) + \mathbb{V}(x)\cos(x) = 0$.

   Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\alpha_k = 2\pi k$. On a $\sin(\alpha_k) = 0$ et $\cos(\alpha_k) = 1$. Donc l'équation devient $V(\alpha_k) = 0$. Ainsi V a une infinité de racines et $V = 0$ car c'est un polynôme.

   On en déduit $U(x)\sin x = 0$ donc $U = 0$.
7. On a $\sin^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{(k)}g^{(n-k)}(x) = xg^{(n+1)}(x) + (n+1)g^{(n)}(x)$.

   Puis $x^{n+1}\sin^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_{n+1}(x)\sin^{(n+2)}(x) + (n+1)[P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)] = [P_{n+1} + (n+1)Q_n]\sin^{(n+1)}(x) + [Q_{n+1} - (n+1)P_n]\sin^{(n+2)}(x)$.

   Donc $P_{n+1} + (n+1)Q_n = X^{n+1}$ et $Q_{n+1} - (n+1)P_n = 0$ par identification obtenue dans la question précédente.
8. On a $Q_{n+1} = (n+1)P_n$ d'après 7. et $Q_{n+1} = XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n$ d'après 3. Donc $XQ_n - XP_n' = 0$ puis $Q_n = P_n'$.

   Puis $P_{n+1} + (n+1)Q_n = X^{n+1}$ d'après 7. et $P_{n+1} = XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n$ d'après 3. Donc $XP_n + XQ_n' = X^{n+1}$ d'où $P_n + Q_n' = X^n$ et enfin $P_n + P_n'' = X^n$.
9. On note $P_n = \sum_{k=0}^{n} b_kX^k$. On a $P_n + P_n'' = \sum_{k=0}^{n} b_kX^k + \sum_{k=2}^{n} b_kk(k-1)X^{k-2}$
   $= \sum_{k=0}^{n-2}(b_k + b_{k+2}(k+2)(k+1))X^k + b_{n-1}X^{n-1} + b_nX^n$.

   Or $P_n + P_n'' = X^n$ donc en identifiant on trouve $b_k + b_{k+2}(k+2)(k+1) = 0, b_{n-1} = 0$ et $b_n = 1$.

   Donc $b_{n-2k} = (-1)^k(n-2k+1)(n-2k+2)...(n-1)nb_n = (-1)^k\frac{n!}{(n-2k)!}$

et $b_{n-2k-1} = (-1)^k(n-2k)(n-2k+1)...(n-2)(n-1)b_{n-1} = 0$.

Ainsi $P_n(X) = \sum_{k=0}^{p} b_{n-2k}X^{2n-k} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k n!}{(n-2k)!}X^{n-2k}$.

10. On remarque que P_n est une solution particulière et les solutions homogènes génératrices sont sin et cos.

    Donc $y(x) = P_n(x) + \lambda \cos x + \mu \sin x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.