# Devoir Surveillé de Mathématiques n° 7
## le samedi 8 Février 2025 - durée 4h

**Exercice 1 :** On recherche à déterminer les solutions entières du système

$$\begin{cases} a+3c+7d & =0 \\ 3a+6b-7c+23d & =4 \\ 2a-3b+17c-d & =1 \end{cases}$$

1) Déterminer le système échelonné réduit équivalent.
2) Résoudre l'équation diophantienne $3x+14y=3$ avec $x,y\in\mathbb{Z}$.
3) Montrer que $(109k+119)/3\in\mathbb{Z}$ ssi $k\equiv 1[3]$.
4) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^4$.

**Exercice 2 :** Factoriser sur $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

1) $P_1(X)=(X^2-X+1)^2+1$.
2) $P_2(X)=2X^4+4X^3+6X^2+4X+1$.
3) $P_3(X)=X^6-2X^4+4X^2-8$.

**Exercice 3 :** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n(X)=X^{2^{n+1}}+X^{2^n}+1$.

1) Calculer $P_0(X)$ et montrer qu'il est irréductible sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $P_1(X)$, puis factoriser le sur $\mathbb{R}[X]$.
3) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1}(X)=P_n(X)(X^{2^{n+1}}-X^{2^n}+1)$.
4) En déduire le PGCD de $P_{n_1}$ et $P_{n_2}$ pour tout couple $(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$.
5) Démontrer que $P_n(X)=P_0(X^{2^n})$ et factoriser $P_n$ sur $\mathbb{R}[X]$.
6) Calculer la somme et le produit des racines de $P_n(X)$.

**Problème I :** Pour tout entier $n$, on recherche à trouver les polynômes vérifiant :

$$(E_n)\quad P_n(X+1)-P_n(X)=X^n.$$

1. Déterminer le degré de $P(X+1)-P(X)$ en fonction du degré de $P$.
2. En déduire le degré de $P_n$.
3. Déterminer les polynômes solutions de $(E_0)$, puis de $(E_1)$.
4. Montrer que si $P_n(X)$ est solution de $(E_n)$ et $a\in\mathbb{R}$ alors $P_n(X)+a$ solution de $(E_n)$. En déduire que l'on peut supposer que 0 est racine de $P_n$.
5. Montrer que, pour $n>0$, 1 est racine de $P_n$ de même multiplicité que 0.
6. Montrer que le polynôme $\frac{1}{n+1}P'_{n+1}(X)$ est solution de $(E_n)$.
7. En déduire les solutions de $(E_n)$ pour $n=2$ et 3.
8. En calculant de deux manières $\sum_{k=0}^{N}P_n(k+1)-P_n(k)$, déterminer des expressions polynomiales de la somme des puissances $n$-ième des entiers pour $n\in[\![1,3]\!]$.

**Problème II :** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = 1$.
2. Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = nX$.
3. En adaptant la méthode, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.
4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \left(X - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \frac{X(1-X)}{n}$.

Pour $x \in [0,1]$ un réel, on note $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
On considère $A = \left\{ k \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$.

5. Montrer que $\sum_{k \in A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
6. Montrer que $\sum_{k \notin A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.
7. En déduire que $S(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

On considère $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et on définit la suite de polynômes :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

8. Montrer que $B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(k/n) - f(x)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
9. Justifier que $f$ est lipschitzienne sur $[0,1]$ et préciser une constante $M$ qui convient.
10. En déduire la limite de $B_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ en fonction de $x \in [0,1]$.

**Problème III :** On définit $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On recherche à calculer la dérivée $n$-ième de $g$ sous la forme :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$

avec $P_n$ et $Q_n$ des polynômes que l'on cherche à déterminer.

1. Justifier que $g$ est de classe $C^\infty$ et calculer $g'$ et $g''$.
2. Déterminer les valeurs des polynômes $P_n$ et $Q_n$ pour $n \in \{0,1,2\}$.
3. Montrer que $\begin{cases} P_{n+1} & = XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n \\ Q_{n+1} & = XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n \end{cases}$
4. En déduire la valeur de $P_3$ et $Q_3$.
5. Montrer que $P_n$ et $Q_n$ ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$ ; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.
6. Montrer que si deux polynômes $U$ et $V$ vérifient $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$ pour tout $x > 0$ alors $U$ et $V$ sont tous deux égaux au polynôme nul.
7. En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant $P_n$, $Q_n$, $P_{n+1}$ et $Q_{n+1}$.
8. En déduire que $P_n' = Q_n$. Préciser une EDL2, que l'on notera $\mathcal{E}_n$, dont $P_n$ est solution.
9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p = \lfloor n/2 \rfloor$. Montrer que $P_n(X) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k n!}{(n-2k)!} X^{n-2k}$.
10. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.