Semaine 19 - Du 3 au 7 Mars 2025

Analyse asymptotique et Développements limités

Révisions de la semaine 18

Développement de référence au voisinage de 0
$x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \tan(x)$ (ordre 5),
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \mathrm{Arctan}\,(x)$.

Les espaces vectoriels

Définition de la structure et exemple
Ensemble non vide muni d'une addition interne et d'un produit par les scalaires.
Espace vectoriel issue de la géométrie : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$.
Espace vectoriel issue de l'analyse : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ pour I un ensemble.
Espace vectoriel issue de l'algèbre : $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Sous-espaces vectoriels
Définition et équivalence comme sous-ensemble non vide stable par combinaisons linéaires.
Sous-espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1, ..., v_n)$ engendré par n vecteurs d'un espace vectoriel.
Somme et intersection de deux sous-espaces vectoriels.
Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Liste de Questions de cours :

a) Démontrer la croissance comparée $\ln(x) =_{x \to +\infty} o(x^{\beta})$ si $\beta > 0$.
b) Démontrer l'unicité du développement limité.
c) Enoncer et démontrer le résultat sur le produit des développements limités.
d) Calculer $\ln^{(k)}(2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule de Taylor-Young.
e) Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forme un $\mathbb{R}$-ev. (2 méthodes)
f) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercices d'Application du Cours

1. Montrer que $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $x + 2y - z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev.
2. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev.
3. Montrer que $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n =_{+\infty} o(1/n^2)\}$ est un $\mathbb{R}$-ev.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ avec $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $x+2y+z = 0\}$.
5. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F_{paire} \oplus F_{impaire}$ avec F_{paire} l'ensemble des fonctions paires et $F_{impaire}$ l'ensemble des fonctions impaires.

Devoir libre

1. Soit $D(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
   On définit $F = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tel que D divise $P\}$.
   Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Soit $E = C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
   On définit $F = \{f \in E$ tel que $f^{(n)} = 0\}$ et $G_a = \{g \in E$ tel que $g(x) =_{x \to a} o(x - a)^n\}$.
   Montrer que $E = F \oplus G_a$.