

DM7 : Analyse asymptotique
à rendre le lundi 3 Mars 2025.

Exercice 1 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0) : \sqrt{3e^x + e^{-x}}$.
2. $DL_2(\pi/3) : \tan(x)$.
3. $DL_3(0) : (1+x)^{\sin x}$.

Exercice 2 : Tracer la fonction $f(x) = \frac{x \ln(x)}{x^2-1}$ sur \mathbb{R}_+^* .

On étudiera en particulier la fonction au voisinage de 0, 1, 2 et $+\infty$ afin d'ajouter les asymptotes ou tangentes éventuelles à la courbe. On précisera leurs positions relatives.

Exercice 3 : Pour $n \geq 3$, on définit les fonctions $f_n : x \mapsto x - n \ln(x)$.

1. Etudier les variations de f_n sur son ensemble de définition.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]1, 2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$ pour tout $n \geq 3$.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ converge vers 1.
5. Montrer que $x_n =_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.