

DM7 - Corrigé

- Exercice 1 :**
1. On a $\sqrt{3e^x + e^{-x}} =_{x \rightarrow 0} [3(1 + x + x^2/2 + x^3/6) + (1 - x + x^2/2 - x^3/6) + o(x^3)]^{1/2}$

$$=_{x \rightarrow 0} [4 + 2x + 2x^2 + x^3/3 + o(x^3)]^{1/2}$$

$$=_{x \rightarrow 0} \sqrt{4} [1 + x/2 + x^2/2 + x^3/12 + o(x^3)]^{1/2}$$

$$=_{x \rightarrow 0} 2 \left[1 + \frac{1}{2}(x/2 + x^2/2 + x^3/12) - \frac{1}{8}(x/2 + x^2/2)^2 + \frac{1}{16}(x/2)^3 + o(x^3) \right]$$

$$=_{x \rightarrow 0} 2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{16}x^2 - \frac{5}{192}x^3 + o(x^3).$$
 2. On a $\tan(x) = \tan(\pi/3 + h) = \frac{\tan(\pi/3) + \tan(h)}{1 - \tan(\pi/3)\tan(h)}$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} + h + o(h^2)}{1 - \sqrt{3}h + o(h^2)}$$

$$=_{h \rightarrow 0} (\sqrt{3} + h + o(h^2))(1 + \sqrt{3}h + 3h^2 + o(h^2))$$

$$=_{h \rightarrow 0} \sqrt{3} + 2\sqrt{3}h + 6h^2 + o(h^2).$$
 3. $(1+x)^{\sin x} = \exp(\sin x \ln(1+x))$

$$=_{x \rightarrow 0} \exp((x - x^3/6 + o(x^3))(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)))$$

$$=_{x \rightarrow 0} \exp(x^2 - x^3/2 + o(x^3))$$

$$=_{x \rightarrow 0} 1 + (x^2 - x^3/2) + (x^2 - x^3/2)^2/2 + o(x^3)$$

$$=_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^2).$$

Exercice 2 : La fonction est de classe C^∞ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$$\text{On a } f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x^2 - 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \ln x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \ln x \right).$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \ln x$.

$$\text{On a } g'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-(x^2 - 1)^2}{x(x^2 + 1)^2} < 0$$

Ainsi g est décroissante avec $g(1) = 0$. Donc g est positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$.

Donc f est croissante sur $]0, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$.

Au voisinage de 0^+ : $f(x) \sim_{0^+} -x \ln(x) \rightarrow 0^+$ donc f se prolonge par continuité avec $f(0) = 0$.

Mais $\frac{f(x)}{x} \sim -\ln x \rightarrow +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0 et la tangente est verticale.

$$\text{Au voisinage de } 1 : f(1+h) =_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) \ln(1+h)}{(1+2h+h^2) - 1}$$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)(h - h^2/2 + h^3/3 + o(h^3))}{2h + h^2}$$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2h} \frac{1 + h/2 - h^2/6 + o(h^2)}{1 + h/2}$$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (1 + h/2 - h^2/6 + o(h^2)) (1 - h/2 + (h/2)^2 + o(h^2))$$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} + 0h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^2).$$

Donc f admet une tangente horizontale d'équation $y = 1/2$ avec la courbe en dessous.

Au voisinage de 2 : $f(2+h) =_{h \rightarrow 0} f(2) + f'(2)h + \frac{f''(2)}{2}h^2 + o(h^2)$ d'après la formule de Taylor-Young.

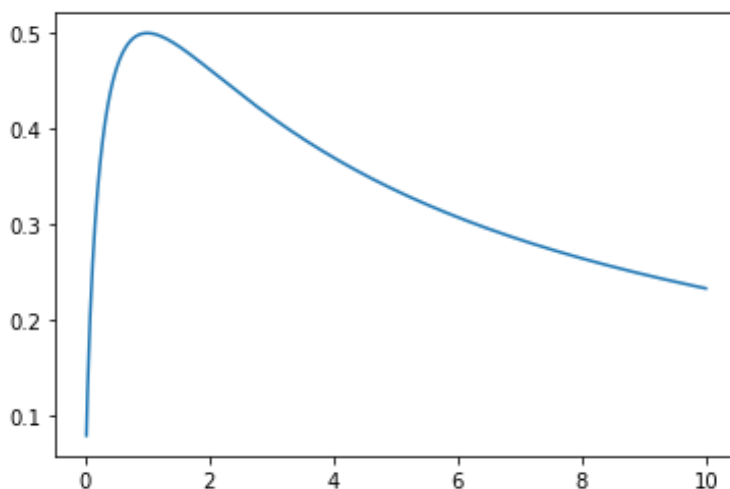
Avec $f(2) = \frac{2 \ln(2)}{3}$, $f'(2) = \frac{3 - 5 \ln(2)}{25}$ et $f''(2) < 0$.

Donc f admet une tangente d'équation $y = \frac{2 \ln(2)}{3} + \frac{3 - 5 \ln(2)}{25}(x - 2)$ avec la courbe en dessous.

Au voisinage de $+\infty$: $f(1/h) = \frac{-\ln(h)/h}{1/h^2 - 1} = -h \ln h \frac{1}{1 - h^2}$

$$=_{h \rightarrow 0} -h \ln h (1 + h^2 + o(h^2)) \text{ avec } h \ln(h) \rightarrow 0 \text{ et } -h \ln h > 0.$$

Donc f admet pour asymptote $y = 0$ avec la courbe au dessus.



Exercice 3 : 1. La fonction f_n est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'_n(x) = 1 - n/x$.

Donc sur le domaine $]0, n]$, f_n est strictement décroissante.

Et sur le domaine $[n, +\infty[$, f_n est strictement croissante.

2. On a $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(2) = 2 - n \ln(2) < 2 - n(2/3) < 0$ car $\ln(2) > 2/3$.

Donc d'après le Thm de la bijection continue, il existe un unique x_n tq $f_n(x_n) = 0$.

3. On a $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} - n \ln(x_{n+1})$
 $= x_{n+1} - (n+1) \ln(x_{n+1}) + \ln(x_{n+1})$
 $= 0 + \ln(x_{n+1}) > 0$ car $x_{n+1} > 1$.

4. On obtient $f_n(x_{n+1}) > 0 = f_n(x_n)$ avec f_n strictement décroissante sur $]1, 2[$.

Donc $x_{n+1} < x_n$. La suite est décroissante et bornée donc d'après le thm de cv monotone elle admet une limite finie $l \in [1, 2]$.

Par l'absurde, si $l > 1$ alors $0 = f_n(x_n) = x_n - n \ln(x_n) \sim l - n \ln(l) \sim -n \ln(l) \rightarrow -\infty$ Absurde.

Donc $l = 1$.

5. On a $x_n =_{n \rightarrow +\infty} 1 + o(1)$ et $\ln(x_n) = \frac{x_n}{n}$.

$$\text{D'où } x_n = \exp(x_n/n) =_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Puis à nouveau } x_n = \exp(x_n/n) =_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$=_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 / 2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$