Les espaces vectoriels

Définition de la structure et exemple

Ensemble non vide muni d'une addition interne et d'un produit par les scalaires.

Espace vectoriel issue de la géométrie : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$.

Espace vectoriel issue de l'analyse : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ pour I un ensemble.

Espace vectoriel issue de l'algèbre : $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Sous-espaces vectoriels

Définition et équivalence comme sous-ensemble non vide stable par combinaisons linéaires.

Sous-espace $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_n)$ engendré par n vecteurs d'un espace vectoriel.

Somme et intersection de deux sous-espaces vectoriels.

Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Famille finie de vecteurs

Famille de vecteurs libres et liées. Vecteurs colinéaires et coplanaires.

Famille de polynômes échelonnés en degré.

Famille de vecteurs générateurs.

Base d'un espace vectoriel

Base d'un espace et d'un sous-espace. Coordonnées d'un vecteur dans une base.

Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Base compatible à une décomposition en somme directe.

Les espaces de dimension finie

Définition de la dimension

Théorème de la base extraite.

Théorème de la base incomplète.

Toutes les bases ont même nombre de vecteurs.

Caractérisation des bases comme les familles vérifiant deux des trois propriétés : libre, génératrice et nombre de vecteurs.

Liste de Questions de cours :

- Calculer $\ln^{(k)}(2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule de Taylor-Young.
- Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forme un $\mathbb{R}$ -ev. (2 méthodes)
- Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'une famille de polynôme échelonné en degré est libre.
- Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1 , $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E .
- Démontrer le théorème de la base extraite.

Exercices d'Application du Cours

1. Pour $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = f(1)\}$ et $G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(x \mapsto e^x)$ sont supplémentaires dans E .
2. Pour $E = \mathbb{R}^3$, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est-elle libre, génératrice de E , une base de E ?
3. Pour $E = \mathbb{R}_3[X]$, la famille $(X - 1, X^2 + 1, (X - 1)^3)$ est-elle libre, génératrice de E , une base de E ?
4. Pour $E = \mathcal{F}(-1, 1[, \mathbb{R})$, déterminer une base de $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(x \mapsto \frac{1}{x+1}, x \mapsto \frac{1}{x-1}, x \mapsto \frac{1}{x^2-1}, x \mapsto \frac{x}{x^2-1} \right)$.
5. Pour $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.
Compléter la base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ en une base de E .

Devoir libre

1. Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$ -espaces-vectoriels :
 - (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0\}$.
 - (b) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) - f(2 - x)\}$.
 - (c) $\left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \bar{z}_1 + z_2 = 0 \right\}$.
2. Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{C}$ -espaces-vectoriels :
 - (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tel que } 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0\}$.
 - (b) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) - f(2 - x)\}$.
 - (c) $\left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \bar{z}_1 + z_2 = 0 \right\}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
Montrer que $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.