Semaine 21 - Du 17 au 21 Mars 2025

Les espaces vectoriels

Révision de la semaine 20

Les espaces de dimension finie

Définition de la dimension

Théorème de la base extraite.
Théorème de la base incomplète.
Toutes les bases ont même nombre de vecteurs.
Caractérisation des bases comme les familles vérifiant deux des trois propriétés : libre, génératrice et nombre de vecteurs.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition et lien pour le calcul avec le rang de la matrice des coordonnées.
Rang d'une famille libre.
Rang d'une famille génératrice.

Supplémentaires en dimension finie

Existence des supplémentaires dans un espace de dimension fini.
Caractérisation des sous-espace supplémentaires F et G d'un espace E de dimension finie comme vérifiant deux des trois propriétés :
$F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$ et $\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G = \dim_{\mathbb{K}} E$.
Formule de Grassmann.

Liste de Questions de cours :

a) Monter qu'une famille de polynôme échelonné en degré est libre.
b) Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1, $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
c) Enoncer et démontrer le Théorème de la base extraite.
d) Enoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension.(Thm 1.5)
e) Enoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille.(Prop 2.2)
f) Enoncer et démontrer la formule de Grassmann.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left\{\frac{(X-\alpha)^k}{k!}\right\}_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ à l'aide du thm de la caractérisation des bases.
2. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée. En déduire un polynôme annulateur de A.
3. On note $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{tel que } P(0) = P'(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^2 - 2X, 2X^3 - 3X^2)$. Montrer que $F = G$ à l'aide du thm de caractérisation des égalités.
4. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 - \{0_E\}$ un vecteur non nul. On note $P = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax + by + cz = 0\right\}$ et $D = \mathrm{Vect}\, u$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ à l'aide du thm de caractérisation des supplémentaires.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $H_1 \neq H_2$ deux hyperplans (de dimension $n-1$) de E. Montrer que $H_1 + H_2 = E$. En déduire que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Devoir libre

1. Pour A et B deux espaces vectoriels quelconques, on considère leur produit :
   $E = A \times B = \{(a, b) \text{ pour } a \in A \text{ et } b \in B\}$.
   On le munit des opérations naturelles :
   - Addition interne $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
   - Produit externe $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

   (a) A l'aide de la définition, montrer que E est un espace vectoriel.

   (b) On suppose que $\mathcal{L}_A = (a_1, ..., a_n)$ et $\mathcal{L}_B = (b_1, ..., b_p)$ sont des familles libres respectives des espaces A et B. Montrer que $\mathcal{L} = \{(a_1, 0_B), ..., (a_n, 0_B), (0_A, b_1), ..., (0_A, b_p)\}$ est un famille libre de vecteurs de E.

   (c) En déduire que $\dim_{\mathbb{K}}(A \times B) = \dim_{\mathbb{K}} A + \dim_{\mathbb{K}} B$ en dimension finie.

   (d) Calculer la dimension de $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des matrices augmentées.