Devoir Surveillé de Mathématiques n° 8
le samedi 15 Mars 2025 - durée 4h

Exercice 1 : Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée.
2) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4) En déduire que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
et décomposer la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{B}$.

Exercice 2 : Soient $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, $\quad F = \left\{ f \in E \text{ telle que } \int_0^1 f = f(0) = f'(1) = 0 \right\}$
et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto t^k$.

1) Montrer que F et G sont des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de E.
2) Montrer que F et G sont en somme directe.
3) Montrer que $E = F \oplus G$.

Problème I : On recherche à étudier la suite vérifiant $e^{x_n} = n - x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On considère la suite de fonctions $f_n(t) = e^t + t - n$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f_n est strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.
   (c) Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
2. Etude la suite implicite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $x_n \to_{n \to +\infty} +\infty$.
   (b) Montrer que $x_n < \ln(n)$ et en déduire que $x_n =_{+\infty} o(n)$.
   (c) Montrer que $x_n =_{+\infty} \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Problème II :

1. On définit $f(t) = \exp(-1/t)$ et $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ pour $t > 0$.
   (a) Prouver que f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour $t > 0, tf'(t) = g(t)$.
   (b) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement est dérivable en 0.
   (c) Etudier les variations de g et tracer son graphe sachant que $e^{-1} = 0.36$ à 10^{-2} près.
2. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto g(1/t)$ s'annulant en 1.
   (a) Calculer H.
   (b) Déterminer un développement limité de H en 0 à l'ordre 3.
3. Soit $n \geq 3$ un entier. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = t/n$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]0, 1[$ notée α_n.
   De même, montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]1, +\infty[$ notée β_n.
   (b) Montrer que les suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ et $(\beta_n)_{n \geq 3}$ sont monotones.
   (c) Montrer que ses deux suites admettent des limites que l'on précisera.

Problème III : On recherche $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(\star) \quad P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$.

1. On écrit $P(X) = A(X) + iB(X)$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que si P vérifie $(\star)$ alors $\forall n \in \mathbb{Z}, B(n) = 0$.
   (b) En déduire que si P vérifie $(\star)$ alors $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. On note $(*)$ la propriété "P est un polynôme vérifiant $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$".
   (a) Montrer que si P vérifie $(*)$ alors $Q(X) = \frac{P(X)-P(0)}{X}$ vérifie $(*)$.
   (b) En déduire par récurrence que si P vérifie $(\star)$ alors $P \in \mathbb{Q}[X]$.
3. On considère la famille de polynômes $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$E_0 = 1, \quad E_1 = X, \quad E_k = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!} \text{ pour tout entier } k \geq 2.$$
   (a) Déterminer le degré, les racines de E_k ainsi que leurs multiplicités.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$, montrer que $E_k(m) = \begin{cases} \binom{m}{k} \text{ si } m \geq 0 \\ (-1)^k \binom{-m+k-1}{k} \text{ si } m < 0 \end{cases}$.
   (c) En déduire que $E_k(X)$ vérifie $(\star)$.
4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $\mathcal{B}_n = (E_0, ..., E_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Soit $P = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_n} \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Calculer les valeurs de $P(0), ..., P(n)$ en fonction des coordonnées de P.
   (c) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq l \leq m$, $\binom{m}{l}\binom{l}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{l-k}$
   et calculer la valeur de $\sum_{l=k}^{m} (-1)^l \binom{m}{l}\binom{l}{k}$
   (d) En déduire que pour tout $0 \leq m \leq n, \lambda_m = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} P(l)$.
5. (a) Montrer que P vérifie $(\star)$ ssi $[\exists \lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{Z}, P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k E_k(X)]$.
   (b) Pour $n = 3$, calculer les coordonnées de $1, X, X^2$ et X^3 dans la base $\mathcal{B}_3$.
   (c) En déduire les polynômes de degré au plus 3 vérifiant $(\star)$.