

DS de Math n° 8 - Corrigé

Exercice 1 : 1) L'espace ambiant est de dimension 3 donc $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) \leq 3$. Ainsi le rang est différent du cardinal (égal à 4). Donc la famille est liée.

$$2) \text{ On calcul } \text{rg}(u_1, u_2, u_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Donc la famille est génératrice.

$$3) \text{ On calcul } \text{rg}(u_1, u_2, u_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Donc la famille est n'est pas génératrice.

4) On a $\text{rg}(\mathcal{B}) = 3 = \text{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Puis on recherche $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ tels que $e_k = a_k u_1 + b_k u_2 + c_k u_3$ décomposant la base canonique (e_1, e_2, e_3) .

$$\text{Pour } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ on trouve le système } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

$$\text{Donc } b_1 = -2, c_1 = 2 \text{ et } a_1 = -1 \text{ c'est à dire } e_1 = -u_1 - 2u_2 + 2u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$$\text{De même, on obtient : } e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Exercice 2 : 1) On montre que F est non-vide et stable par combinaison linéaire.

La fonction nulle g_0 est bien de classe C^1 et vérifie $\int_0^1 g_0 = g_0(0) = g'_0(1) = 0$ i.e. $g_0 \in F$.

Soient $g_1, g_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour $f = g_1 + \lambda g_2$, on a :

$$\int_0^1 f = \int_0^1 g_1 + \lambda \int_0^1 g_2 = 0, f(0) = g_1(0) + \lambda g_2(0) = 0 \text{ et } f'(1) = g'_1(1) + \lambda g'_2(1) = 0.$$

Donc $f \in F$.

Puis G est un ss- $\mathbb{R}$ -ev en tant qu'espace engendré.

2) Soit $f \in F \cap G$. On a $f = af_0 + bf_1 + cf_2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ car $f \in G$.

Puis $f(t) = a + bt + ct^2$ avec $f \in F$. Donc $0 = f(0) = a$, $0 = f'(1) = b + 2c$ et $0 = \int_0^1 f = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$. Ce système homogène a trois équations et trois inconnues admet pour unique solution $a = b = c = 0$. Donc $f = 0_E$ est la fonction nulle.

3) Soit $f \in E$. On recherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f - af_0 - bf_1 - cf_2 \in F$.

$$\begin{cases} \int_0^1 f(t) - a - bt - ct^2 dt = 0 \\ f(0) - a = 0 \\ f'(1) - b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \int_0^1 f \\ a = f(0) \\ b + 2c = f'(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = f(0), b = 3 \int_0^1 f - \frac{f'(1)}{2} \text{ et } c = -\frac{3}{2} \int_0^1 f + \frac{3}{4} f'(1).$$

Ainsi on pose $g = f(0)f_0 + \left(3 \int_0^1 f - \frac{f'(1)}{2}\right) f_1 + \left(-\frac{3}{2} \int_0^1 f + \frac{3}{4} f'(1)\right) f_2$ et on a $f = (f - g) + g \in F + G$.

Problème I : 1. (a) La fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a $f'_n(t) = e^t + 1 > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $f''_n(t) = e^t > 0$ donc f_n est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection. Puis $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $f_n(t) \sim_{t \rightarrow -\infty} t \rightarrow -\infty$ et $f_n(t) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc 0 admet un unique antécédent que l'on note $x_n \in \mathbb{R}$ avec $e^{x_n} + x_n - n = 0$ ssi $e^{x_n} = n - x_n$.

(c) On a $f_n(x_{n+1}) = e^{x_{n+1}} + x_{n+1} - n = (n + 1 - x_{n+1}) + x_{n+1} - n = 1 > 0$.

2. (a) On a $f_n(x_n) = 0 < f_n(x_{n+1})$ avec f_n strictement croissante donc $x_n < x_{n+1}$. Ainsi (x_n) est une suite strictement croissante. D'après le thm de convergence monotone $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si par l'absurde $l \in \mathbb{R}$ est finie alors $n = e^{x_n} + x_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} (e^l + l) \in \mathbb{R}$ Absurde. Donc $x_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (b) On a $x_n = \ln(n - x_n) < \ln(n)$ car $x_n > 0$ (APCR n=1).
Ainsi $0 < \frac{x_n}{n} < \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$. Donc $x_n =_{n \rightarrow +\infty} o(n)$.
- (c) On a $x_n = \ln(n - x_n) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)$
 $=_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) + \frac{x_n}{n} + o\left(\frac{x_n}{n}\right)$.
 Donc en particulier $x_n = \ln(n) + o(1)$. Puis de nouveau :
 $x_n =_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) + \frac{x_n}{n} + o\left(\frac{x_n}{n}\right)$
 $=_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) + \frac{\ln n + o(1)}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$
 $=_{n \rightarrow +\infty} \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Problème II : 1. (a) Les fonctions f et g sont de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ par opérations.

On a $f'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-1/t} = \frac{f(t)}{t^2} = \frac{g(t)}{t}$. Donc $tf'(t) = g(t)$.

- (b) On sait que $t > 0$ donc $t = 1/x$ avec $x \rightarrow +\infty$.
On a $g(t) = g(1/x) = xe^{-x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.
Donc g se prolonge par continuité en 0 avec $g(0) = 0$.
De même $\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = x^2e^{-x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$.
Donc g est dérivable en $g'(0) = 0$.
- (c) On a $g'(t) = \frac{tf'(t)-f(t)}{t^2} = \frac{g(t)-f(t)}{t^2} = \frac{f(t)-tf(t)}{t^3} = f(t)\frac{1-t}{t^3}$.
Or $f(t) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
On a $g(1) = e^{-1}$ et $\lim_{+\infty} f = 1$ donc $\lim_{+\infty} g = 0$.
2. (a) On a $H(x) = \int_1^x te^{-t} dt = [-te^{-t}]_1^x + \int_1^x e^{-t} dt = \frac{2}{e} - (x+1)e^{-x}$ par IPP.
- (b) On a $H(x) =_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e} - (1+x) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$
 $=_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e} + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
3. (a) On a $f(t) = t/n$ ssi $g(t) = 1/n$.
Sur $[0, 1]$ g réalise une bijection strictement croissante et $g([0, 1]) = [0, e^{-1}]$ avec $1/n \leq 1/3 < e^{-1}$. Donc il existe un unique antécédent de $1/n$ sur $[0, 1]$ noté α_n .
Sur $[1, +\infty[$ g réalise une bijection strictement décroissante et $g([1, +\infty[) = [0, e^{-1}]$.
Donc il existe un unique antécédent de $1/n$ sur $[1, +\infty[$ noté β_n .
- (b) On a $g(\alpha_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(\alpha_{n+1})$ avec g croissante. Donc $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ est décroissante.
De même $g(\beta_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(\beta_{n+1})$ avec g décroissante. Donc $\beta_n < \beta_{n+1}$ est croissante.
- (c) Par thm de convergence monotone $\alpha_n \rightarrow l \in [0, 1]$ Puis $g(\alpha_n) \rightarrow g(l)$ car g continue sur le domaine. Or $g(\alpha_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Donc $g(l) = 0$ par unicité de la limite puis $l = 0$.
De même, on obtient $\beta_n \rightarrow b \in [1, +\infty[$. Puis $g(b) = 0$ si b est une limite finie. Donc $b = +\infty$ puis $\beta_n \rightarrow +\infty$.

Problème III : 1. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $P(n) = A(n) + iB(n) = m \in \mathbb{Z}$. Ainsi en considérant la partie imaginaire, on obtient $B(n) = \text{Im}(P(n)) = \text{Im}(m) = 0$.

- (b) Le polynôme $B(X)$ admet une infinité de racines (tous les $n \in \mathbb{Z}$) donc c'est le polynôme nul. Puis $P(X) = A(X) + i0 \in \mathbb{R}[X]$ par construction.
2. (a) On écrit $P(X) = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$. On a $P(0) = a_0$ donc $Q(X) = \sum_{k \geq 1} a_k X^{k-1}$ est bien un polynôme. Puis pour $r \in \mathbb{Q}$. On a $Q(r) = \frac{P(r)-P(0)}{r} \in \mathbb{Q}$ car $P(r), P(0)$ et $\frac{1}{r}$ sont des rationnels.
- (b) On montre par récurrence sur le degré de P que " P vérifie $(*) \Rightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$ ".
Init. Si $\deg(P) = 0$ alors $P(X) = P(0) \in \mathbb{Q}$ est bien à coefficients rationnels.

Hérédité : Soit P de degré $n+1$, alors Q vérifie $(*)$ et $\deg(Q) = n$. Donc hypothèse de récurrence $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Puis $P(X) = P(0) + XQ(X) \in \mathbb{Q}[X]$ car $P(0) \in \mathbb{Q}$. Conclusion. On sait que P vérifie $(*)$ donc P vérifie $(*)$ puis $P \in \mathbb{Q}[X]$.

3. (a) Les polynômes E_k sont des produits de facteurs de degré 1 donc $\deg(E_k) = k$ et $\text{Rac}(E_k) = \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ sont toutes des racines simples.
- (b) Si $0 \leq m < k$ alors $E_k(m) = 0 = \binom{m}{k}$ (hors du triangle de Pascal)
 Si $m \geq k$ alors $E_k(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = \binom{m}{k}$.
 Si $m = -p < 0$ alors $E_k(m) = \frac{(-p)(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} = (-1)^p \binom{p+k-1}{k} = (-1)^m \binom{-m+k-1}{k}$.
- (c) Les coefficients binomiaux $\binom{m}{k}$ et $\binom{-m+k-1}{k}$ sont des entiers naturels. Donc dans tous les cas $E_k(m) \in \mathbb{Z}$. Ainsi $E_k(X)$ vérifie $(*)$.
4. (a) La famille $(E_0, \dots, E_n)$ est échelonnée en degré donc elle est libre. Par dimension on peut conclure car $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \text{Card } B_n$ donc la famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) On a $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k E_k$. Donc $P(m) = \sum_{k=0}^n \lambda_k E_k(m) = \sum_{k=0}^m \lambda_k \binom{m}{k}$.
- (c) On a $\binom{m}{l} \binom{l}{k} = \frac{m!}{l!(m-l)!} \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{m!}{(m-l)!k!(l-k)!}$.
 Et $\binom{m}{k} \binom{m-k}{l-k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{(m-k)!}{(l-k)!(m-l)!} = \frac{m!}{k!(l-k)!(m-l)!}$. D'où l'égalité.
 On a $\sum_{l=k}^m (-1)^l \binom{m}{l} \binom{l}{k} = \sum_{l=k}^m (-1)^l \binom{m}{k} \binom{m-k}{l-k} = \binom{m}{k} \sum_{l=k}^m (-1)^l \binom{m-k}{l-k}$
 $= \binom{m}{k} \sum_{l=0}^{m-k} (-1)^{a+k} \binom{m-k}{a} = \binom{m}{k} (-1)^k (1-1)^{m-k} = 0$ si $k < m$.
 Si $k > m$ alors la somme est vide et $\sum_{l=k}^m (-1)^l \binom{m}{l} \binom{l}{k} = 0$.
 Si $k = m$, il y a un seul terme : $\sum_{l=m}^m (-1)^l \binom{m}{l} \binom{l}{k} = (-1)^m$.
- (d) On a $\sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} P(l) = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \sum_{k=0}^l \lambda_k \binom{l}{k}$ d'après 4 (b)
 $= \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{l=k}^m (-1)^l \binom{m}{l} \binom{l}{k}$ en échangeant les sommes
 $= (-1)^m \lambda_m$ car seul $k = m$ est non nul.
5. (a) $(\Rightarrow)$ Si P vérifie $(*)$ alors en particulier $P(0), \dots, P(n)$ sont des entiers. Donc $\lambda_m = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} P(l)$ sont également des entiers. cqfd.
 $(\Leftarrow)$ Si $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k E_k(X)$ avec des coefficients entiers. Alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $E_k(m) \in \mathbb{Z}$. Donc $P(m) = \sum_{k=0}^n \lambda_k E_k(m)$ est également un entiers. Ainsi P vérifie $(*)$.
- (b) On a : $1 = E_0$ et $X = E_1$.
 Puis : $X^2 = 2 \frac{X(X-1)}{2} + X = 2E_2 + E_1$.
 Et $X^3 = 6 \frac{X(X-1)(X-2)}{6} + 3X^2 - 2X = 6E_3 + 3(2E_2 + E_1) - 2E_1 = 6E_3 + 6E_2 + E_1$.
- (c) Les polynômes sont ceux de la forme $P(X) = n_0 E_0(X) + n_1 E_1(X) + n_2 E_2(X) + n_3 E_3(X)$ avec $n_k \in \mathbb{Z}$ quatre entiers quelconques.