

Les espaces de dimension finie

Révision de la semaine 21

Les applications linéaires

Généralités

Définitions et conditions minimales : $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace-vectoriel.

Composition d'applications linéaires et distributivité des opérations.

Puissances et polynômes d'un endomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

$\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ et l'image d'un sous- \mathbb{K} -espace-vectoriel sont des sous- \mathbb{K} -espace-vectoriel.

Lien entre l'injectivité (resp. la surjectivité) et les sous-espaces $\text{Ker } f$ (resp. $\text{Im } f$).

Définition d'un morphisme \mathbb{K} -linéaire

Construction par l'image d'une base.

Construction par la restriction à des espaces supplémentaires.

Définition des homothéties, des symétries et des projecteurs.

Caractérisation par $s^2 = id$ et par $p^2 = p$.

Liste de Questions de cours :

- a) Énoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension. (Thm 1.5)
- b) Énoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille. (Prop 2.2)
- c) Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.
- d) Montrer que $\text{Ker } f$ est un espace vectoriel et qu'il caractérise l'injectivité de f .
- e) Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\text{Im } p$ le long de $\text{Ker } p$.
- f) En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercices d'Application du Cours

1. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y-z \\ x-z \end{pmatrix}$.
Montrer que f est \mathbb{R} -linéaire et calculer son noyau et son image.
2. On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), P \mapsto \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P(-1) & P(0) \end{pmatrix}$.
Montrer que f est \mathbb{R} -linéaire et calculer son noyau et son image.
3. On considère $p : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P(1) + (X-1)P'(1)$.
Montrer que p est un projecteur et calculer ses espaces propres.
4. On considère $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -y \\ 2x-2y-z \end{pmatrix}$.
Montrer que s est une symétrie et calculer ses espaces propres.
5. On considère $p : E \rightarrow E$ la projection sur E_1 le long de E_2 .
Montrer que $q = id_E - p$ est un projecteur et préciser ses espaces propres.
Montrer que $s = 2p - id_E$ est une symétrie et préciser ses espaces propres.

Devoir libre

1. On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
Rmq : C'est la dérivée discrète appliquée au polynôme.
 - (a) Montrer que Δ est linéaire et calculer son noyau.
 - (b) On considère Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Δ_n définit bien un endomorphisme et préciser son noyau et son image.
 - (c) En déduire que Δ est surjective.
 - (d) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta P = Q$ et $P(0) = 0$.
Ceci permet de créer une application $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], Q \mapsto P$ l'unique solution.
Rmq : C'est l'unique primitive discrète qui s'annule en 0.
 - (e) Montrer que f est une application linéaire. (non trivial!)
 - (f) Montrer que $\Delta \circ f = id_{\mathbb{R}[X]}$ et que $p = f \circ \Delta$ est un projecteur dont on précisera les espaces propres.