Semaine 23 - Du 31 Mars au 4 Avril 2025

Les applications linéaires

Généralités

Définitions et conditions minimales : $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.
L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
Composition d'applications linéaires et distributivité des opérations.
Puissances et polynômes d'un endomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
$\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ et l'image d'un sous-$\mathbb{K}$-espace-vectoriel sont des sous-$\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
Lien entre l'injectivité (resp. la surjectivité) et les sous-espaces $\mathrm{Ker} f$ (resp. $\mathrm{Im} f$).

Définition d'un morphisme $\mathbb{K}$-linéaire

Construction par l'image d'une base.
Construction par la restriction à des espaces supplémentaires.
Définition des homothéties, des symétries et des projecteurs.
Caractérisation par $s^2 = id$ et par $p^2 = p$.

Isomorphismes entres espaces vectoriels

Définition d'isomorphisme, d'automorphisme et du groupe linéaire $GL(E)$.
Stabilité par composition et inverse. Caractérisation par l'image d'une base.
Le caractère isomorphe de deux espaces est une relation d'équivalence.
En dimension finie, les espaces isomorphes sont ceux de même dimensions.
Caractérisation des isomorphismes $f : E \to F$ comme vérifiant deux des trois propriétés :
$\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, $\mathrm{Im} f = F$ et $\dim E = \dim F$.

Rang d'une application

Définition des application de rang finie $f : E \to F$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.
Si F est de dimension finie $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité ssi f surjective.
Si E est de dimension finie $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi f injective.
Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), ..., f(e_n))$.
Théorème du rang pour $f : E \to F$ avec E de dimension finie.

Liste de Questions de cours :

a) Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un espace vectoriel et qu'il caractérise l'injectivité de f.
b) Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\mathrm{Im} p$ le long de $\mathrm{Ker} p$.
c) En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
d) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n+1$ points fixés i.e. $\forall i \in [\![0,n]\!], P(a_i) = b_i$ avec $a_0, ..., a_n$ distincts et $b_0, ..., b_n$ quelconques.
e) Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $\mathcal{B}_E$ une base de E. Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.
f) Enoncer et démontrer le théorème du rang.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(1) + P(0)X + P(-1)X^2$.
   Montrer que φ est de rang fini et préciser son rang.
2. Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le rang de φ et en déduire que c'est un automorphisme.
   (b) Calculer φ^3 en déduire φ^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} y \\ x \\ x-y+z \end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Montrer que s est un symétrie vectorielle.
   (b) Déterminer les espaces propres de cette symétrie.
   (c) Caractériser l'application $p = \frac{1}{2}(id_{\mathbb{R}^3} + s)$.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $(id_{\mathbb{R}^3} + s)^n$.
4. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ et $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$ ssi $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ ssi $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$.
   (d) Si E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ ssi $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
5. Soit $E = \{(u_n)_{n\geq 0}$ tel que $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie$\}$,
   $H = \{u \in E$ telle que $\lim_{+\infty} u_n = 0\}$ et D l'ensemble des suites constantes.
   Montrer que $E = H \oplus D$.

Devoir libre

1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme.
   (b) Calculer $\mathrm{Im} f$ et en déduire le rang de l'application.
   (c) Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée mais que (I_2, A) est libre.
   (d) En déduire que (I_2, A) est une base de $\mathrm{Ker} f$.
   (e) Montrer que B commute avec A ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = P(A)$.
2. Soit f, g, h trois endomorphismes de E vérifiant $\begin{cases} g \circ f & = h \\ f \circ h & = g \\ h \circ g & = f \end{cases}$.
   Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g = \mathrm{Ker} h$ et que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g = \mathrm{Im} h$.
3. Soit $f : E \to F$ une application linaire surjective
   et $g : F \to G$ une application telle que $g \circ f$ est linéaire.
   Montrer que g est linéaire.