TD 15-Corrigé : Dénombrement

15.1 Dénombrement théorique

Exo 1 : Indication :

On écrit un paramétrage de l'ensemble par un ensemble d'entiers. Si celui-ci est bijectif, on obtient la définition du cardinal : $\boxed{\text{Card}\, E = n \text{ ssi } \exists\varphi : [\![1,n]\!] \to E \text{ bijective}}$

Solution :

Notons $E = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n = x + 2y\}$.

On recherche $n = x + 2y$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Donc $y = \frac{n-x}{2} \in [0, n/2]$. En posant $p = \lfloor n/2 \rfloor$, on a $y \in [\![0,p]\!]$.

On définit $\varphi : [\![0,p]\!] \to E, y \mapsto (n-2y, y)$. L'application est bien bijective de réciproque $\varphi^{-1}(x,y) = y$. Donc les ensembles sont équipotents et $\text{Card}\, E = \text{Card}\, [\![0,p]\!] = p+1$.

Exo 2 : Indication :

On travaille ici dans $F_p = \mathcal{F}(E, [\![1,p]\!])$ dont on connaît le cardinal. On recherche à appliquer des formules d'opérations sur les ensembles.

$\text{Card}\,[Surj(E,[\![1,p]\!])] = p^n - \text{Card}\,[F_p \setminus Surj(E,[\![1,p]\!])]$.

On peut notamment passer aux complémentaires pour faire apparaître une récurrence forte. Les applications qui ne sont pas des surjections à valeurs dans p éléments sont des surjections à valeurs dans strictement moins d'éléments.

Solution :

a) Le nombre d'applications de E dans $\{1,2\}$ est $\text{Card}\, F_2 = 2^n$.

On a (f n'est pas une surjection) ssi ($\text{Card}\, f(E) < 2$) ssi ($\text{Card}\, f(E) = 1$) ssi $f(E) = \{a\}$ est un singleton ssi $f : t \mapsto a$ est une application constante.

Il y a 2 applications constantes dans F_2, à savoir $t \mapsto 1$ et $t \mapsto 2$.

Donc $Card[Surj(E,\{1,2\})] = 2^n - 2$.

b) On a $\text{Card}\, F_3 = 3^n$, le nombre d'applications de E dans $\{1,2,3\}$.

On a (f n'est pas une surjection) ssi ($Card[f(E)] < 3$) ssi $Card[f(E)] \in \{1,2\}$.

1er cas : $\text{Card}\,[f(E)] = 1$ ssi f est constante. Il y 3 applications constantes.

2eme cas : $\text{Card}\,[f(E)] = 2$ ssi $f(E)$ est une partie à 2 éléments de $\{1,2,3\}$ il y a $\binom{3}{2} = 3$ parties possibles. L'application $f : E \to f(E)$ est une surjection dans une partie à deux éléments. D'après a), il y a $2^n - 2$ telles applications surjective si on fixe $f(E) = \{a,b\}$. Dans ce cas, il y a donc $3(2^n - 2)$ applications non surjectives.

En conclusion, on dénombre $Card[Surj(E,\{1,2,3\})] = 3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3.2^n + 3$.

c) $f : E \to E$ est une surjection ssi f est une bijection car $CardE = CardE$.

Il y a donc $n!$ applications de ce type.

d) Il y a n^n applications de E dans E et $n!$ surjections.

Donc il y a $n^n - n!$ applications non surjectives.

Exo 3 : Indication : Il s'agit d'un cas de combinatoire avec ordre et sans répétition qui fait apparaître les arrangements $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$

Solution :

a) On doit choisir un 6-uplets d'éléments distincts dans $\{1,2,...,6\}$ donc il y a $A_6^6 = 6! = 720$ nombres d'arrangements possibles.

Remarque : Une démonstration plus formelle consisterait à montrer que E est équipotent à $L_6(\{1,2,...,6\})$. L'argument précédent en est une version simplifiée largement acceptée.

b) Le rang correspond à $\text{Card}\,\{x \in E \text{ tel que } x \leq 362145\}$.

On peut partitionner cet ensemble avec :
$E_1 = \{x \in E \text{ tel que } x \le 10^5\} = \{1 * * * ** \in E\}$ de cardinal $5!$
$E_2 = \{x \in E \text{ tel que } 10^5 < x \le 2.10^5\} = \{2 * * * ** \in E\}$ de cardinal $5!$
$E_{31} = \{x \in E \text{ tel que } 31.10^5 < x \le 32.10^4\} = \{31 * * * * \in E\}$ de cardinal $4!$
$E_{32} = \{x \in E \text{ tel que } 32.10^5 < x \le 33.10^4\} = \{32 * * * * \in E\}$ de cardinal $4!$
$E_{34} = \{x \in E \text{ tel que } 34.10^5 < x \le 35.10^4\} = \{34 * * * * \in E\}$ de cardinal $4!$
$E_{35} = \{x \in E \text{ tel que } 35.10^5 < x \le 36.10^4\} = \{35 * * * * \in E\}$ de cardinal $4!$
$E_{361} = \{x \in E \text{ tel que } 361.10^5 < x \le 362.10^4\} = \{361 * ** \in E\}$ de cardinal $3!$
et $\{362145\}$ cardinal 1.

Donc le rang vaut $2.5! + 4.4! + 3! + 1 = 343$.

c) En inversant le procédé de la question b), on décompose 500 à l'aide des factorielles successives : $500 = 4.5! + 3.3! + 1.2!$.

Le nombre est après $1*****, 2*****, 3*****, 4*****, 512***, 513***, 514***, 5162**$.
C'est donc 516243.

d) On a $\sum_{x \in E} x = \sum_{x\in E} c_5.10^5 + c_4.10^4 + c_3.10^3 + c_2.10^2 + c_1.10 + c_0$
$= \sum_{k=0}^{5} \sum_{c_i} c_k 10^k = \sum_{k=0}^{5} (1+2+3+4+5+6).5!.10^k$ car chaque chiffre apparaît $5!$ fois en position k.
$= 21.120.\frac{10^6-1}{10-1} = 7.40.999999 = 279999720$.

Exo 4 : <u>Indication</u> :

Les formules avec les coefficients binomiaux peut en général être abordées de deux manières :
- De manière calculatoire, en utilisant les formules $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ et la formule du binôme de Newton.
- De manière combinatoire, en utilisant la définition $\binom{n}{k} = \operatorname{Card} \mathcal{P}_k(E)$ avec $\operatorname{Card} E = n$.

<u>Solution par le calcul</u> :

1. On a $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{n!}{p!(n-p)!} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p}$ $= 2^p \binom{n}{p}$.
2. On a $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$ d'après la relation de Pascal. Donc $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ expression qui se télescope dans la somme :
$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
3. On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{0} = \binom{n+1}{1}$ donne $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
Puis pour $p = 1$, $\sum_{k=0}^{p} k = \binom{p+1}{2} = \frac{(p+1)p}{2}$.
Pour $p = 2$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{p+1}{3} = \frac{(p+1)p(p-1)}{6}$.
Donc $\sum_{k=0}^{p} k^2 = 2\sum_{k=0}^{p} \frac{k(k-1)}{2} + \sum_{k=0}^{p} k = \frac{(p+1)p(p-1)}{3} + \frac{(p+1)p}{2} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.
Pour $p = 3$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{24}$.
Et $\sum_{k=0}^{p} k^3 = 6\frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{24} + 3\sum_{k=0}^{p} k^2 - 2\sum_{k=0}^{p} k = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$

<u>Solution combinatoire</u> :

1. La première formule peut être vu comme compter le nombre de partitions $E = A \uplus B \uplus C$ avec $\operatorname{Card} E = n$ et $\operatorname{Card}(A \uplus B) = p$.
Si on commence par choisir A alors il y a $\binom{n}{k}$ possibilités, puis le choix de B est de trouver $p-k$ dans $E \setminus A$ donc $\binom{n-k}{p-k}$ possibilités, enfin $C = E \setminus (A \uplus B)$ est imposé. On trouve ainsi $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ possibilités au total.
Si on commence par choisir C alors il y a $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ possibilités. Puis $A \uplus B = E \setminus C$ est un partition de p éléments avec 2^p possibilités. On trouve ainsi $2^p\binom{n}{p}$ possibilités au total.
2. La seconde formule est le choix d'une partie à $p+1$ éléments parmi $n+1$ nombres de cardial $\binom{n+1}{p+1}$.

Pour une telle partie X, on peut commencer par choisir son plus grand élément $\alpha = k+1 \in [\![p+1, n+1]\!]$ car il faut laisser de la place pour les p éléments strictement plus petits. Puis on choisit $X \setminus \{\alpha\}$ une partie à p éléments strictement plus petit que α i.e. $\mathcal{P}_p([\![1,k]\!])$. Au total, on a donc $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ possibilités.

Exo 5 : Indication :

On introduit un candidat à la réciproque et on vérifie que $\phi \circ \psi = id_F$ et $\psi \circ \phi = id_E$.

Solution :

a) On introduit l'application $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), Z \mapsto (A \cap Z, B \cap Z)$.
Pour $Z \in \mathcal{P}(E)$, on a $\phi(\psi(Z)) = (A \cap Z) \cup (B \cap Z) = (A \cup B) \cap Z = Z$ car $Z \subset E = A \cup B$.
Pour $X \in \mathcal{P}(A)$ et $Y \in \mathcal{P}(B)$. On a $\psi(\phi(X,Y)) = (A \cap (X \cup Y), B \cap (X \cup Y)) = (X, Y)$.
En effet, $X \subset A$ donc $A \cap X = X$ et $B \cap X = \emptyset$ car $A \cap B = \emptyset$. Donc $A \cap (X \cup Y) = (A \cap X) \cup (B \cap Y) = X \cup \emptyset = X$ et de même $B \cap (X \cup Y) = Y$.
Donc ϕ et ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

b) On a $\binom{n+m}{k} = \text{Card}\, \mathcal{P}_k(E) = \text{Card}\, \psi(\mathcal{P}_k(E))$.
Pour $(X, Y) \in \psi(\mathcal{P}_k(E))$, on a $X \in \mathcal{P}_i(A)$ et $Y \in \mathcal{P}_{k-i}(B)$ pour $i = \text{Card}\, X$.
Donc $\text{Card}\, \psi(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{i=0}^{k} \text{Card}\, \mathcal{P}_i(A) \text{Card}\, \mathcal{P}_{k-i}(B) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

Exo 6 : On note E l'ensemble à np éléments. On souhaites trouver des parties $E_1, ..., E_n$ telles que $\text{Card}\, E_i = p$ et $\biguplus_{i=1}^{n} E_i = E$.

On a $E_1 \in \mathcal{P}_p(E)$. Donc il y a $\binom{np}{p}$ choix possibles.

On a $E_2 \in \mathcal{P}_p(E - E_1)$. Donc il y a $\binom{np-p}{p}$ choix possibles.

Le choix des n parties $(E_1, ..., E_n)$ est donc données par le produit :
$\prod_{i=0}^{n-1} \binom{np-ip}{p} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{[(n-i)p]!}{p![(n-i-1)p]!} = \left(\frac{1}{p!}\right)^n \frac{(np)!}{0!}$ car le produit est télescopique.

Une partition est un choix d'ensembles désordonnées donc pour passer du choix de $(E_1, ..., E_n)$ à celui de $\{E_1, ..., E_n\}$ il faut diviser par le nombres de permutations. Ainsi le nombre de possibilités est $\frac{(np)!}{p!^n n!}$.

On peut faire l'application numérique avec $n = 15$ et $p = 3$, on trouve $\frac{45!}{3!^{15} 15!} = 6,37.10^{36}$

15.2 Application aux probabilités

Indication : Il s'agit ici d'appliquer, en supposant l'équiprobabilité, la formule $\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega)}}$.

La méthode est ainsi de définir univers Ω qui modélise le problème très précisément. Cela peut être un ensemble de parties, un ensemble d'application ou autre. Son cardinal n'est pas suffisant, il nous faut sa description.

Puis les événements vont être des parties de $A \subset \Omega$. Il s'agit alors de dénombrer les éléments qui les composent. Seul le cardinal de A est utile. Il n'est pas impératif de le décrire.

Exo 7 : Le jeu de cartes se modélise en $H \times C$ avec les 8 hauteurs $H = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$ et les 4 couleurs $C = \{coeur, carreau, pique, treffles\}$. Une main est la données de 5 cartes désordonnées $\Omega = \mathcal{P}_5(H \times C)$ et $\text{Card}\, \Omega = \binom{32}{5} = 201376$.

a) Le choix d'un full est celui de deux hauteurs ordonnées $A_8^2 = 8.7 = 56$,
de 3 couleurs désordonnées pour la première hauteur $C_4^3 = 4$,
de 2 couleurs désordonnées pour la seconde hauteur $C_4^2 = 6$.
Donc $\text{Card}\,(Full) = 56.4.6 = 1344$ et $\mathbb{P}(Full) \simeq 0.67\%$.

b) Le choix d'un carré est celui d'une hauteur 8 choix et d'une carte restante 28.
Donc $\text{Card}\,(Carr) = 224$ et $\mathbb{P}(Carr) \simeq 0.11\%$.

c) Le choix d'un brelan est une hauteur puis 3 cartes désordonnées et 2 cartes restantes désordonnées. On trouve $8.C_4^3.C_{28}^2 = 12096$. On compte ainsi les brelans et les fulls donc $\text{Card}\,(Brelan) = 12096 - 1344 = 10752$. Puis $\mathbb{P}(Brelan) = 5.34\%$.

d) On choisit 2 hauteurs désordonnées puis 2 couleurs pour chaque hauteur puis une carte restantes parmi $32 - 8 = 24$. On a $\text{Card}\,(2Pairs) = C_8^2.C_4^2.C_4^2.24 = 24192$ et $\mathbb{P}(2Pairs) = 12.01\%$.

e) On choisit 1 hauteur puis 2 couleurs puis 3 hauteurs restantes et leurs couleurs. $\text{Card}\,(Pair) = 8.C_4^2.C_7^3.4^3 = 107520$ et $\mathbb{P}(Pair) = 53.39\%$.

Exo 8 : On note $B = [\![1, n]\!]$ les balles et $T = [\![1, n]\!]$ les boites.
On note $\Omega = \mathcal{F}(B, T)$ l'univers avec les aléas $\omega \in \Omega$ une application tels que $\omega(b) = t$ ssi la balle b est rangée dans le tiroir t. On a $\text{Card}\,\Omega = n^n$.
On note A l'évènement "une boite vide". Si $\omega \in \bar{A}$ alors l'application est surjective entre deux ensembles même cardinal. Donc ω est une bijection. Ainsi $\text{Card}\,\bar{A} = n!$.
Donc $\mathbb{P}(\bar{A}) = n!/n^n$. Puis $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{n!}{n^n}$.

Exo 9 : On note $P = [\![1, 12]\!]$ les places de parking et $\Omega = \mathcal{P}_8(P)$ l'univers. Les aléas $\omega \in \Omega$ sont $\omega = \{p_1, p_2, ..., p_8\}$ les numéros des places occupés par les voitures. On a $\text{Card}\,\Omega = \binom{12}{8} = 495$.
On note A l'évènement "quatre places restantes adjacentes".
Donc ω est le complémentaire $\overline{\{k, k+1, k+2, k+3\}} \in A$ avec $k \in [\![1, 9]\!]$.
Ainsi $\text{Card}\,A = 9$ puis $\mathbb{P}(A) = 9/495 = 1/55$.

Exo 10 : On note $V = B \cup D$ l'ensemble des vis. avec $\text{Card}\,B = 90$ les bonnes et $\text{Card}\,D = 10$ les défectueuses.
L'univers est $\Omega = \mathcal{P}_{10}(V)$ avec un aléa $\omega = \{v_1, ..., v_{10}\}$ les vis choisies.
On a $\text{Card}\,\Omega = \binom{100}{10}$.
Puis l'évènement A "aucune défectueuse" est $\mathcal{P}_{10}(B)$ donc $\text{Card}\,A = \binom{90}{10}$.
Ainsi $\mathbb{P}(A) = \frac{90!}{80!}10!\frac{90!10!}{100!} = \frac{90!^2}{80!100!} = \frac{81.82....90}{91.92...100} \simeq 33\%$.

Exo 11 : On note $M \times \{gauche, droite\}$ les 20 chaussures avec $\text{Card}\,M = 10$ les modèles de chaussures. On a $\Omega = \mathcal{P}_4(C \times \{g, d\})$ l'univers avec un aléa $\omega = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ les 4 chaussures choisies. On a $\text{Card}\,\Omega = \binom{20}{4} = 4845$.
Puis pour avoir une exactement une paire, on choisit un modèle puis on complète.
On trouve $10.\binom{9}{2}.2^2 = 1440$. Donc une probabilité de 29.7%.
Les doubles paires sont le choix de deux modèles $\binom{10}{2} = 45$.
Donc pour avoir au moins une paire, on trouve $1440 + 45 = 1485$ et une probabilité de 30.6%.

Exo 12 : L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^5$ de cardinal $6^5 = 7776$.
Pour avoir un triple, on choisit la face à tripler 6 possibilités.
On choisit les dès qui donnent cette faces $\binom{5}{3} = 10$.
On choisit les valeurs des deux autres dès $5^2 = 25$.
Il y a donc $6.10.25 = 1500$ possibilités et une probabilité de $\frac{1500}{7776} = \frac{125}{648} \simeq 19.3\%$.