Les applications linéaires

Révision de la semaine 23

Dénombrement

Soient A et B des ensembles finis.

Ensemble fini et cardinale

Lien entre cardinal et les ensembles de référence $\emptyset$ et $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Conséquence sur les cardinaux de l'injectivité et de la surjectivité de $f : A \rightarrow B$.

Equivalence de l'injectivité, de surjectivité et la bijectivité de $f : A \rightarrow B$ de même cardinal.

Opération sur les cardinaux

Cardinal de l'union disjointe et de l'union quelconque.

Cardinal de $A \times B$, le produit cartésien.

Cardinal de $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble de parties de A .

Cardinal de $\mathcal{F}(A, B) = B^A$, l'ensemble des applications de A dans B .

Combinaisons et Arrangements

Nombres de p -listes d'éléments distincts parmi n éléments.

Nombres de parties de p éléments parmi n éléments.

Triangle de Pascal et formule du binôme.

Liste de Questions de cours :

- Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n + 1$ points fixés i.e. $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$ avec $a_0, \dots, a_n$ distincts et $b_0, \dots, b_n$ quelconques.
- Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{B}_E$ une base de E . Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.
- Enoncer et démontrer le théorème du rang.
- Démontrer que $\text{Card}(A \uplus B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ pour A et B disjoints.
- Démontrer la caractérisation des bijections :
 $f : A \rightarrow B$ bijective ssi deux des trois f injective, f surjective, $\text{Card } A = \text{Card } B$.
- Démontrer avec le dénombrement que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercices d'Application du Cours

1. André participe à une course avec 8 autres coureurs. Les trois premiers reçoivent une récompense.
 - (a) Combien y a-t-il de podium possible ?
 - (b) Quelle est la probabilité que André soit sur le podium ?
 - (c) Quelle est la probabilité que André arrive second ?
 - (d) Il est venu avec son frère. Quelle est la probabilité qu'il reçoivent tous les deux une récompense ?
 - (e) Quelle est la probabilité qu'il arrive devant son frère sachant qu'ils sont tous les deux sur le podium ?
2. Un jardinier mélange 4 oignons de tulipes rouges avec 4 oignons de tulipes jaunes. Il réalise une bordure en plantant en ligne au hasard les 8 oignons. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - (a) Les 4 tulipes rouges sont les unes à coté des autres.
 - (b) Les tulipes rouges et jaunes sont alternées sur la bordure
 - (c) Les 3 tulipes situées à droites de la bordures sont rouges

Devoir libre

1. On considère 51 entiers distincts compris entre 1 et 100.
 - (a) Montrer qu'il y a deux entiers consécutifs parmi eux.
 - (b) Montrer qu'il y a deux entiers dont la somme vaut 101.
2. On recherche calculer u_n le nombre de façon de paver une allée de n mètres de long avec des carreaux de $1m$ et $2m$ (et d'une largeur identique).

Par exemple $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$. Donc $u_4 = 5$.

 - (a) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
 - (b) Déterminer une relation de récurrence et la démontrer.
 - (c) En déduire la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.